Registro Lezioni di Analisi del 24 e 26 ottobre 2016.

Di seguito si riporta il riassunto degli argomenti svolti; i riferimenti sono a parti del Cap.3 Limiti e continuita' del testo ed alle note alla fine di questo file.

(1) Si sono enunciati i teoremi che descrivono la compatibilita' dell'operazione di limite con le operazioni algebriche sui numeri reali, con le operazioni algebriche parziali sui numeri reali estesi (cfr. Teor. 3.19 e 3.20) e con la relazione d'ordine sui numeri reali estesi (cfr. Teor. 3.17 e Note finali). Si e' enunciato il teorema che descrive la compatibilita' della proprieta' di continuita' con le operazioni algebriche sui numeri reali (cfr. Teor. 3.21). Si e' enunciato il teorema del confronto (cfr. Teor. 3.13 e Note finali). Al posto della locuzione "definitivamente per $x \to c$" si e' usata la locuzione "vicino a c" (cfr. Note finali).

Si sono applicati questi teoremi sui seguenti esempi
- limiti, asintoti, e grafico della funzione $(3x-4)/(x-2)$.
- limiti della funzione $(\sin x)/x$ per $x \to +\infty$ e $-\infty$.
- limiti della funzione $x + \sin x$ per $x \to +\infty$ e $-\infty$.

(2) Si e' enunciato il teorema sulla compatibilita' della operazione di limite con l'operazione di composizione di funzioni (cfr. Teor. 3.23 e Note finali) e quello sulla continuita' delle funzioni composte (cfr. Teor. 3.24). Si sono applicati questi teoremi sui seguenti esempi

-limiti della funzione $2^{\frac{1}{x}}$ per x tendente a $0^+, 0^-, 0$;

-limite della funzione $\exp_2((3x-4)/(x-2))$ per x tendente a $+\infty$.

(3) Si e' data la nozione di "un infinito" di confronto fra infiniti, (cfr.: Par. 1.5, solo nozione di infinito e confronto fra infiniti; Note finali). Si sono confrontate le funzioni logaritmiche di diversa base, le funzioni potenza di diverso esponente, le funzioni esponenziali di diversa base (cfr. Note finali). Si e' enunciato il teorema sulla gerarchia degli infiniti fra funzioni logaritmiche, potenze ed esponenziali. (cfr. Teor. 3.10 e Teor. 3.25).

Si e' applicato questo teorema sui seguenti esempi
- limite di $(e^x - x^2)/(x^3 - \log x)$ per $x \to +\infty$;
- limite di $(7 \cdot 2^x + 6 \cdot x^3)/(5 \cdot 3^x + 4 \cdot x^2)$ per $x \to +\infty$ e $-\infty$.

(4) Si e' considerata la successione

$$(1+\frac{1}{n})^n \quad (n \geq 1),$$

si e' enunciato che e' crescente e limitata, dunque convergente a un numero reale; questo numero si e' detto numero di Nepero, e si e' indicato con "e" (cfr. Par. 1.4). Si e' trasferito questo risultato alle funzioni, enunciando che

$$(1+\frac{1}{x})^x \to e \quad \text{per } x \to \pm\infty;$$

mediante un cambiamento di variabile, si e' dedotto che

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} \to e \quad \text{per } x \to 0$$

Si e' posto $\log_e x = \log x$ (spesso in Italia si pone $\log_e x = \ln x$).

(5) Si e' enunciato che dai limiti associati a quello che definisce il numero "e" seguono dei limiti notevoli per le funzioni esponenziali, logaritmiche, e potenze:

$$\begin{aligned} \frac{e^x - 1}{x} &\to 1 \quad \text{per } x \to 0 \\ \frac{\log(1+x)}{x} &\to 1 \quad \text{per } x \to 0 \\ \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} &\to \alpha \quad \text{per } x \to 0, \end{aligned}$$

e si e' messo in luce il significato di questi limiti per il grafico delle corrispondenti funzioni (cfr.: Par. 3.2, terzo sottoparagrafo; Note finali). Si sono ricavate la regole di cambiamento di base per le operazioni di esponenziale e logaritmo (cfr. Note finali) e si sono ricavate le seguenti varianti dei limiti notevoli:

$$\begin{aligned} \frac{a^x - 1}{x} &\to \log a \quad \text{per } x \to 0 \\ \frac{\log_a(1+x)}{x} &\to \log_a e \quad \text{per } x \to 0. \end{aligned}$$

Si sono applicati questi limiti notevoli sui seguenti esempi
- limite di $(e^x - 1)/(x^2)$ per $x \to 0$;
- limite di $(e^x - 1)/\sqrt{x}$ per $x \to 0^+$;
- limite di $(2^x - 1)/(3^x - 1)$ per $x \to 0$.

(6) Si sono enunciati i limiti notevoli per le funzioni trigonometriche:

$$\begin{aligned} \frac{\sin x}{x} &\to 1 \quad \text{per } x \to 0 \\ \frac{1-\cos x}{x^2} &\to \frac{1}{2} \quad \text{per } x \to 0 \end{aligned}$$

(cfr. Par.3.2, prima parte). Si e' applicato il primo di questi limiti sul seguente esempio
- limite di $x \sin(1/x)$ per $x \to +\infty$.

(7) Si e' osservato che ogni funzione potenza di una funzione (positiva) con esponente una funzione puo' essere riscritta come funzione potenza di un numero (positivo) con esponente una funzione: $f(x)^{g(x)} = a^{g(x)\log_a f(x)}$ (con $f(x) > 0$ e $a > 0$). Si e' mostrato come questo fatto possa essere usato per studiare i limiti di queste funzioni. Si e' considerato l'esempio
- limite di $x^{(1/x)}$ per $x \to +\infty$.

Note

(1) Il Teor. 3.17 e' stato dato nella forma, verbalmente piu' forte ma equivalente, seguente:

Teor. Per $x \to c$ sia $f(x) \to \ell_1$ e $g(x) \to \ell_2$. Se $f(x) \leq g(x)$ vicino a c, allora $\ell_1 \leq \ell_2$.

(1) Del Teor. del confronto si sono date anche due varianti, la seguente ed una analoga.

Teor. Siano $f_1(x), g(x)$ definite vicino a c.
- Se $f_1(x) \to +\infty$ per $x \to c$ e $f_1(x) \leq g(x)$ vicino a c, allora $g(x) \to +\infty$ per $x \to c$.

(1) Dal fatto che l'esistenza ed il valore del limite di una successione a_n ($n \in \mathbb{N}$) per $n \to +\infty$ non cambia se si considerano solo i termini a_n con n maggiore-uguale ad un indice n_0, si deduce che l'esistenza ed il valore del limite di una funzione $f(x)$ ($x \in D$) per $x \to c$ non cambia se si considerano solo i valori di $f(x)$ con $x \neq c$ e $x \in (D \cap I)$ dove I e' un intervallo contenente c. Diciamo che "$f(x)$ ($x \in D$) possiede la proprieta' $\mathcal{P}$ vicino a c", se $f(x)$ possiede la proprieta' $\mathcal{P}$ per ogni $x \neq c$ con $x \in (D \cap I)$ dove I e' un opportuno intervallo contenente c.

(2) Il Teor. 3.23 e' stato dato nela forma equivalente

Teor. Siano: f una funzione di una variabile x, g una funzione di una variabile t e x_0 un punto di accumulazione per il dominio di $g \circ f$. Se $f(x) \to t_0$ per $x \to x_0$ ed esiste $\lim_{t \to t_0} g(t)$ allora, a meno che si verifichi la circostanza descritta sotto, si ha

$$\exists \lim_{x \to x_0} g(f(x)) = \lim_{t \to t_0} g(t).$$

Circostanza critica: esiste una successione x_n di punti del dominio di f diversi da x_0 con $x_n \to x_0$ e $f(x_n) = t_0$ per ogni n, e $g(t)$ e' (definita e) discontinua in $t = t_0$.

(Facoltativo. Un esempio nel quale questa circostanza critica fa fallire il Teor.: per la funzione $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = 3 + (\cos x)/x$ e la funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $g(3) = 1$ e da $g(t) = 0$ per $t \neq 3$, si ha:
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 3$ e $\lim_{t \to 3} g(t) = 0$;
la funzione $g \circ f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ e' data da $g(f(x)$ uguale a 1 oppure 0 secondo che x appartiene o meno all'insieme $\{2\pi, 4\pi, 6\pi, \ldots\}$ e dunque $\lim_{x \to +\infty} g(f(x))$ non esiste.)

(3) Nel Par.1.5 si confrontano infiniti dati da successioni divergenti. Per completezza qui sotto si riporta l'analogo per le funzioni.

Una funzione $f(x)$ si dice essere "un infinito" per $x \to c$, se $f(x)$ tende a $+\infty$ o $-\infty$ per $x \to c$. Per ogni due infiniti $f(x)$ e $g(x)$ per $x \to c$, si dice che $f(x)$ e' un infinito di ordine inferiore, dello stesso ordine, oppure di ordine superiore a $g(x)$ secondo che rispettivamente il limite del rapporto $f(x)/g(x)$ per $x \to c$ sia 0, un numero reale $\ell \neq 0$, oppure $\pm\infty$.

(3) Si sono provate le seguenti semplici relazioni per $x \to +\infty$: a^x e' un infinito di ordine superiore a un infinito b^x (dove $a, b > 1$) se e solo se $a > b$; x^α e' un infinito di

ordine superiore a un infinito x^β (dove $\alpha, \beta > 0$) se e solo se $\alpha > \beta$; ogni due infiniti $\log_a x$ e $\log_b x$ (dove $0 < a, b \neq 1$) sono dello stesso ordine.

(3) Si e' affermato che i limiti notevoli sulla funzione esponenziale naturale, logaritmo naturale, e potenze possono essere immaginati informalmente come le seguenti proprieta':

- i grafici delle funzioni $e^x - 1$ e $\log(1+x)$ (passano per l'origine ed) hanno entrambi nell'origine retta tangente $y = x$,

- il grafico della funzione $(1+x)^\alpha - 1$ (passa per l'origine ed) ha nell'origine retta tangente $y = \alpha x$.

(5) Si e' osservato che per ogni tre numeri reali a, b, x con $0 < a, b \neq 1$, si ha $a^x = b^{x \log_b a}$, e che, sotto la condizione $x > 0$, si ha $\log_a x = \log_a b \log_b x$.