Registro Lezione di Algebra lineare del 25 ottobre 2016.

Algebra delle matrici e algebra delle funzioni lineari.

Abbiamo visto che le funzioni lineari $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sono tutte e sole le funzioni del tipo

$$f(x_1, \ldots, x_n) = (a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n, \ldots\ldots, a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n) \quad \text{con } a_{ij} \text{ costanti,}$$

oppure, identificando vettori con vettori colonna,

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

in breve, indicando con $\mathbf{x}$ il vettore colonna $n-$dimensionale in entrata e con $A = (a_{ij})$ la matrice $m \times n$ dei coefficienti,

$$f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}.$$

Da un altro punto di vista: per ciascuna A matrice $m \times n$ fissata, la legge $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ che ad ogni vettore $\mathbf{x}$ colonna $n \times 1$ associa il vettore $A\mathbf{x}$ colonna $m \times 1$, definisce una funzione $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ che e' lineare, ed ogni funzione lineare $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e' di questo tipo.

Questa corrispondenza fra matrici e funzioni lineari ha le seguenti proprieta'

• per ogni n intero positivo,

$$f_{I_n} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}.$$

Infatti $f_{I_n} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e' data da

$$f_{I_n}(\mathbf{x}) = I_n\mathbf{x} = \mathbf{x} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{x}), \qquad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

• per due matrici B ed A e' definita la matrice prodotto BA se e solo se per le corrispondenti funzioni lineari f_B ed f_A e' definita la funzione composta $f_B \circ f_A$, inoltre

$$f_B \circ f_A = f_{BA}.$$

Infatti, per due matrici B ed A di tipi $q \times p$ ed $m \times n$, il prodotto BA e' definito se e solo se $p = m$, e $p = m$ se e solo se per le funzioni lineari $f_B : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ e $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e' definita la composta $f_B \circ f_A$. In tal caso sia f_{BA} che $f_B \circ f_A$ sono funzioni lineari $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q$, e

$$(f_B \circ f_A)(\mathbf{x}) = f_B(f_A(\mathbf{x})) = B(A\mathbf{x}) = (BA)\mathbf{x} = f_{BA}(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Applicazione La funzione composta $g \circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ delle funzioni lineari

$$
\begin{aligned}
f &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x_1, x_2) = (2x_1 + 3x_2, 4x_1 + 5x_2),\\
g &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad g(x_1, x_2) = (6x_1 + 7x_2, 8x_1 + 9x_2)
\end{aligned}
$$

e' data da

$$
\begin{aligned}
g(f(x_1, x_2)) &= g(2x_1 + 3x_2, 4x_1 + 5x_2)\\
&= (6(2x_1 + 3x_2) + 7(4x_1 + 5x_2), 8(2x_1 + 3x_2) + 9(4x_1 + 5x_2)) = \dots
\end{aligned}
$$

Allo stesso modo si calcola la funzione lineare $g \circ f$ composta di due funzioni lineari qualsiasi; la procedura e' semplice, ma la sua applicazione diventa piuttosto complessa col crescere delle dimensioni degli spazi coinvolti. Puo' allora risultare conveniente riguardare le due funzioni lineari come corrispondenti $g = f_B$ e $f = f_A$ di due matrici, calcolare la matrice prodotto BA, e prendere la funzione lineare $f_{BA}(= g \circ f)$. Nell'esempio in considerazione, questa procedura diviene

$$
\begin{aligned}
g = f_B,\ f = f_A : \quad B &= \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 9 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\\
BA &= \begin{pmatrix} 36 & 41 \\ 64 & 73 \end{pmatrix} \quad f_{BA}(= f_B \circ f_A = g \circ f)
\end{aligned}
$$

da cui

$$
(g \circ f)(x_1, x_2)) = (36x_1 + 41x_2, 64x_1 + 73x_2).
$$

Matrici invertibili, matrice inversa.

Consideriamo un numero naturale n fissato, e le matrici quadrate di tipo $n \times n$. L'operazione di prodotto di matrici $n \times n$ e' associativa, non e' commutativa e possiede un elemento neutro che e' la matrice unita' I_n. Per $n = 1$ l'insieme delle matrici reali $n \times n$, l'operazione di prodotto fra di esse e la matrice unita' $\mathbf{I}_n$ divengono l'insieme dei numeri reali, l'operazione di prodotto fra di essi, ed il numero 1.

Definizione. Sia A una matrice $n \times n$; una matrice B $n \times n$ si dice essere "una inversa" di A se

$$
AB = I_n = BA.
$$

Si dice che A e' invertibile, se A possiede qualche inversa.

Questa definizione e' circospetta, in quanto essendo il prodotto non commutativo non e' detto a priori che una matrice che funge da inversa sulla sinistra di A debba fungere da inversa anche sulla destra di A, e nemmeno che se esiste sia una sola ... Si prova che le cose vanno bene; innanzitutto si ha

Proposizione. Ogni matrice A invertibile possiede (una ed) una sola inversa, che si dice "la matrice inversa" di A e si indica con A^{-1}.

Esempio. Ci chiediamo se e' invertibile la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Incominciamo a chiederci se esiste una matrice $B = \begin{pmatrix} b & c \\ d & e \end{pmatrix}$ tale che

$$BA = I_2 \quad \text{cioe'} \quad \begin{pmatrix} b & c \\ d & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Svolgendo il prodotto si ha

$$\begin{pmatrix} b & 2b + c \\ d & 2d + e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

cioe'

$$\begin{array}{ll} b = 1; & 2b + c = 0; \\ d = 0; & 2d + e = 1 \end{array}$$

da cui si trova

$$b = 1, c = -2, d = 0, e = 1 \quad \text{cioe'} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dunque questa matrice e' una inversa sinistra di A. Ci chiediamo se

$$AB = I_2 \quad \text{cioe'} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Svolgendo il prodotto si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

concludiamo dunque che A e' invertibile e

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esempio. Ci chiediamo se e' invertibile la seguente matrice

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Incominciamo a chiederci se esiste una matrice $\begin{pmatrix} b & c \\ d & e \end{pmatrix}$ tale che

$$\begin{pmatrix} b & c \\ d & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Svolgendo il prodotto si ha

$$\begin{pmatrix} 4b+6c & 2b+3c \\ 4d+6e & 2d+3e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

cioe′

$$\begin{array}{ll} 4b+6c=1; & 2b+3c=0; \\ 4d+6e=0; & 2d+3e=1. \end{array}$$

Osserviamo che le equazioni $4b+6c=1$ e $2b+3c=0$ sono incompatibili, dunque la matrice in esame non possiede alcuna inversa sinistra e a maggior ragione non possiede alcuna inversa.

L′invertibilita′ di una matrice e′ caratterizzata dal seguente

Teorema. Per ogni matrice A $n \times n$, le seguenti proprieta′ sono equivalenti:

(1) le colonne di A sono linearmente indipendenti;

(2) le righe di A sono linearmente indipendenti;

(3) $\det A \neq 0$;

(4) A e′ invertibile.

L′equivalenza delle prime tre condizioni e′ conseguenza del teorema sul rango di una matrice, e puo′ essere espressa sinteticamente nella forma

$$\rho(A) = n.$$

Cio′ che questo teorema afferma di nuovo e′ che questa proprieta′ equivale alla invertibilita′. Non dimostriamo questo teorema.

Si osservi che per $n=1$ il teorema afferma che per ogni numero reale a sono equivalenti le condizioni: (1) $xa=0$ solo per $x=0$; (2) $a \neq 0$; (3) esiste un b tale che $ab=1$.

Definizione. Una matrice A si dice ″matrice non singolare,″ se possiede una (e dunque tutte le) proprieta′ del teorema di sopra.

Trasposizione.

Leggendo per righe gli elementi di una matrice A $m \times n$ e trascrivendoli per colonne si ottine una matrice A^T $n \times m$, che si dice ″trasposta″ della matrice data. In simboli:

$$A = (b_{\bullet\bullet}) \quad A^T = (c_{\bullet\bullet}): \quad c_{ij} = b_{ji}, \quad i=1,\ldots,n,\ j=1,\ldots,m$$

Ad esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} = A^T.$$

Formula per la matrice inversa.

Teorema. Per ogni matrice non singolare A $n \times n$, si ha

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T,$$

dove A_{ij} e' il complemento algebrico dell'elemento a_{ij} di A.

Nel caso $n = 2$ le formula per la matrice inversa diviene

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}, \qquad (ad - bc \neq 0).$$

Ad esempio

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{4-6} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Inversione. Potenze di matrici

Proposizione. Se due matrici A e B $n \times n$ sono invertibili, allora anche AB e' invertibile, inoltre

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Infatti:

$$\begin{aligned} B^{-1}A^{-1}A\,B &= B^{-1}I_n\,B = B^{-1}B = I_n \\ A\,B\,B^{-1}A^{-1} &= A\,I_n\,A^{-1} = A\,A^{-1} = I_n. \end{aligned}$$

Definizione. Per ogni matrice A $n \times n$ ed ogni $p \in \mathbb{Z}$ la potenza della matrice A con esponente p e' la matrice

$$A^p = \begin{cases} A \cdots A \ \ (p \text{ volte}) & \text{per } p > 0 \\ I_n & \text{per } p = 0 \\ A^{-1} \cdots A^{-1} \ \ (-p \text{ volte}) & \text{per } p < 0 \end{cases}$$

dove per $p \leq 0$ si assume A non singolare.

Esempio.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^{-2} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Proposizione. L'operazione di potenza di una matrice quadrata ad esponente intero relativo possiede le seguenti proprieta':

$$A^p A^q = A^{p+q}$$
$$(A^p)^q = A^{pq};$$

la proprieta' $(AB)^p = A^p B^p$ non vale in generale, ma vale sotto la condizione $AB = BA$.

Funzioni lineari invertibili, funzione inversa

Definizione. Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una funzione lineare; una funzione lineare $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ si dice essere "una inversa" di f se

$$g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} = f \circ g.$$

Si dice che f e' invertibile, se f possiede qualche inversa.

Proposizione. Ogni funzione lineare f invertibile possiede (una ed) una sola inversa, che si dice "la funzione inversa" di A e si indica con f^{-1}.

Proposizione. Sia A una matrice $n \times n$ e sia $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ la corrispondente funzione lineare. Allora A e' invertibile se e solo se f_A e' invertibile; inoltre, in caso affermativo, si ha

$$(f_A)^{-1} = f_{A^{-1}}.$$

Riferimenti.

Cap.8 Elementi di geometria e algebra lineare; Par.4 Matrici e trasformazioni lineari; 4.5 Matrice inversa.