

## Registro Lezioni di Algebra lineare del 15 e 16 novembre 2016.

Di seguito si riporta il riassunto degli argomenti svolti; i riferimenti sono a parti del Cap.8 Elementi di geometria e algebra lineare Par.5 Sistemi lineari del testo ed alle note alla fine di questo file.

(1) Si sono date la nozione di equazione lineare e sistema lineare in una data sequenza di incognite, e la nozione di soluzione di una tale equazione e di un tale sistema. Si sono introdotti i termini "determinato", "indeterminato" e "impossibile" per indicare un sistema con una ed una sola soluzione, piu' di una soluzione, o nessuna soluzione ( cfr. Par.5.1 Generalita' e metodo di Cramer pp. 426–428 e Note finali ).

(2) Ci si e' posto il problema di stabilire se un sistema lineare di  $n$  equazioni in  $n$  incognite e' determinato e in caso affermativo risolverlo. Si e' descritta una forma del metodo di eliminazione adatta a rispondere a questo problema ( cfr. Note finali ).

(3) Si e' mostrato come il sistema generale di  $n$  equazioni in  $n$  incognite, oltre che nella forma scalare, si possa rappresentare anche in forma vettoriale e matriciale ( cfr. Note finali ).

(4) Si sono ricordate alcune proposizioni equivalenti su una matrice quadrata che sono state prese come definizione di matrice non singolare ( cfr. Note finali ).

(5) Si e' enunciato il teorema di Cramer e si e' data una dimostrazione di una delle sue parti (cfr. Par.5.1 Generalita' e metodo di Cramer, Teorema 8.10 a p.431 e Note finali ). Si e' data una applicazione ad un sistema parametrico.

(6) Si e' mostrato come il sistema generale di  $m$  equazioni in  $n$  incognite si possa rappresentare, oltre che nella forma scalare, anche in forma vettoriale e matriciale ( cfr. Note finali ).

(7) Si sono ricordate le definizioni ed i teoremi che portano alla definizione del rango di una matrice (cfr. Note finali).

(8) Ci si e' posto il problema di stabilire sotto quali condizioni un sistema lineare di  $m$  equazioni in  $n$  incognite ammette qualche soluzione, si e' enunciato il teorema di Rouché'-Capelli, e se ne e' data dimostrazione di una parte (cfr. Par.5.3 Sistemi generali ... Teorema 8.11, e Note finali ). Si e' data una applicazione ad un sistema parametrico.

Note.

(1) Una equazione lineare in  $n$  incognite  $x_1, \dots, x_n$  e' una equazione che si puo' scrivere come un polinomio di primo grado in  $x_1, \dots, x_n$  (ammesso il caso degenere del polinomio nullo) uguagliato a una costante:

$$a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b, \quad \text{in breve} \quad \sum_{i=1}^n a_ix_i = b,$$

dove i coefficienti  $a_1, \dots, a_n$  e il termine noto  $b$  sono costanti in  $\mathbb{R}$ . Una soluzione della equazione e' una  $n$ -pla di numeri reali  $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$  che sostituiti ordinatamente alle incognite rendono vera l'uguaglianza:

$$\sum_{i=1}^n a_i \bar{x}_i = b.$$

Consideriamo inizialmente sistemi di  $n$  equazioni lineari in  $n$  incognite, cioe' sistemi del tipo

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}, \quad \text{in breve} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

dove i coefficienti  $a_{ij}$  e i termini noti  $b_i$  sono costanti in  $\mathbb{R}$ . Una soluzione del sistema e' una  $n$ -pla di numeri reali  $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$  che sia soluzione di ciascuna equazione del sistema.

Diciamo che un sistema e' impossibile, determinato o indeterminato secondo che abbia nessuna soluzione, una ed una sola soluzione, oppure piu' di una soluzione. Proveremo in seguito che se un sistema lineare ha piu' di una soluzione, allora ne ha infinite.

Esempio. Si verifica che il sistema nelle incognite  $x, y$

$$\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 5x + 6y = 7 \end{cases}$$

e' determinato ed ha soluzione  $(-1, 2)$ .

Esempio. Il seguente sistema nelle incognite  $x, y$

$$\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 6x + 9y = 5 \end{cases}$$

e' impossibile. Infatti si ha  $6x + 9y = 3 \cdot (2x + 3y)$  mentre  $5 \neq 3 \cdot 4$ , dunque la seconda equazione e' incompatibile con la prima.

Esempio. Il seguente sistema nelle incognite  $x, y$

$$\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 6x + 9y = 12 \end{cases}$$

e' indeterminato. Infatti si ha  $6x + 9y = 3 \cdot (2x + 3y)$  e  $12 = 3 \cdot 4$ , dunque la seconda equazione e' una conseguenza della prima equazione, il sistema si riduce alla prima equazione, e ci sono infinite soluzioni.

(2) Sia dato un sistema lineare di  $n$  equazioni nelle  $n$  incognite  $x_1, \dots, x_n$ .

-Metodo di eliminazione, caso tipico.

La prima incognita  $x_1$  compare nella prima equazione del sistema, si elimina  $x_1$  dalla seconda, terza, ...,  $n$ -ma equazione sommando ad esse opportuni multipli della prima equazione. La seconda incognita  $x_2$  compare nella seconda equazione del nuovo sistema, si elimina  $x_2$  dalla terza, quarta, ...,  $n$ -ma equazione del nuovo sistema sommando ad esse opportuni multipli della seconda equazione. Iterando, si ottiene un sistema triangolare non degenere, cioè del tipo

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}^* x_1 + a_{12}^* x_2 + \dots + a_{1n}^* x_n = b_1^* \\ a_{22}^* x_2 + \dots + a_{2n}^* x_n = b_2^* \\ \vdots \\ a_{nn}^* x_n = b_n^* \end{array} \right. ,$$

con  $a_{11}^*, a_{22}^*, \dots, a_{nn}^* \neq 0$ . Il sistema è determinato; dalla  $n$ -ma equazione si ricava il valore di  $x_n$ ; nella  $(n-1)$ -ma equazione si sostituisce il valore di  $x_n$  e si ricava il valore di  $x_{n-1}$ ; ... nella prima equazione si sostituiscono i valori di  $x_n, x_{n-1} \dots x_2$  e si ricava il valore di  $x_1$ .

Esempio. Per il seguente sistema nelle incognite  $x, y$  si ha

$$\begin{array}{l} eq_1 \\ eq_2 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 2x + 3y = 4 \\ 5x + 6y = 7 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} eq_1 \\ eq_2 - \frac{5}{2} eq_1 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 2x + 3y = 4 \\ -\frac{3}{2}y = -3 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x + 6 = 4; \quad x = -1 \\ y = 2 \end{array} \right.$$

Il sistema è determinato ed ha soluzione  $(-1, 2)$ .

Esempio. Per il seguente sistema nelle incognite  $x, y, z$  si ha

$$\begin{array}{l} eq_1 \\ eq_2 \\ eq_3 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x + 2y + 2z = 1 \\ 2x + 5y + 6z = 3 \\ 3x + 8y + 9z = 6 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} eq_2 - 2 eq_1 \\ eq_3 - 3 eq_1 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x + 2y + 2z = 1 \\ y + 2z = 1 \\ 2y + 3z = 3 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} eq_3 - 2 eq_2 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x + 2y + 2z = 1 \\ y + 2z = 1 \\ -z = 1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 6 - 2 = 1; \quad x = -3 \\ y - 2 = 1; \quad y = 3 \\ z = -1 \end{array} \right.$$

Il sistema è determinato ed ha soluzione  $(-3, 3, -1)$ .

Non sempre si presenta il caso tipico. Alcuni esempi.

(A) E' dato il sistema nelle incognite  $x, y, z$

$$\begin{cases} 2y + 2z = 1 \\ 2x + 5y + 6z = 3 \\ 3x + 8y + 9z = 6 \end{cases} ;$$

la prima incognita  $x$  non compare nella prima equazione, e non si puo' usare la prima equazione per eliminare  $x$  dalla seconda e terza equazione; si puo' allora scambiare le prime due equazioni

$$\begin{cases} 2x + 5y + 6z = 3 \\ 2y + 2z = 1 \\ 3x + 8y + 9z = 6 \end{cases}$$

ed applicare il metodo a questo sistema.

(B) E' dato un sistema nelle incognite  $x, y, z$  nel quale la prima incognita  $x$  non compare in alcuna equazione

$$\begin{cases} by + cz = d \\ fy + gz = h \\ jy + kz = \ell \end{cases}$$

dove  $b, c, \dots, \ell$  sono costanti in  $\mathbb{R}$ . Possiamo allora concludere che il sistema non e' determinato. Infatti:

- se non esistono valori di  $y, z$  che soddisfano le tre equazioni, allora il sistema dato e' impossibile;
- se esiste una coppia  $(\bar{y}, \bar{z})$  che soddisfa le tre equazioni, allora anche ogni terna  $(x, \bar{y}, \bar{z})$  con  $x$  numero reale qualsiasi soddisfa le tre equazioni, e il sistema dato e' indeterminato.

(2) Sia dato un sistema lineare di  $n$  equazioni nelle  $n$  incognite  $x_1, \dots, x_n$ .

- Metodo di eliminazione, caso generale.

Se  $x_1$  non compare in alcuna equazione, allora si conclude che il sistema non e' determinato. Altrimenti, si individua la prima equazione nella quale compare  $x_1$ , si pone questa equazione come prima equazione del sistema, e si elimina  $x_1$  dalla seconda, terza, ...,  $n$ -ma equazione sommando ad esse opportuni multipli della prima equazione. Se  $x_2$  non compare in alcuna equazione dalla seconda in poi, allora si conclude che il sistema dato non e' determinato. Altrimenti, si individua fra le equazioni dalla seconda in poi la prima nella quale compare  $x_2$ , si pone questa equazione come seconda equazione del sistema, e si elimina  $x_2$  dalla terza, quarta, ...,  $n$ -ma equazione sommando ad esse opportuni multipli della seconda equazione. Iterando, o si conclude che il sistema non e' determinato, oppure ci si ritrova nel caso tipico descritto sopra.

- Metodo di eliminazione generale, versione piu' libera:

Se esiste una incognita che non compare in alcuna equazione, allora si conclude che il sistema non e' determinato. Se ciascuna incognita compare in almeno una

equazione, allora si sceglie una incognita ed una equazione nella quale essa compare, e si usa tale equazione per eliminare tale incognita da tutte le altre equazioni. Si dimenticano l'incognita scelta e l'equazione scelta e si riapplica la procedura al sistema delle restanti  $n - 1$  equazioni nelle restanti  $n - 1$  incognite. Iterando, o si conclude che il sistema non e' determinato, oppure si ottiene una lista delle  $n$  incognite ed una sequenza di  $n$  equazioni tali che ciascuna incognita nella lista compare nella corrispondente equazione e non compare nelle equazioni successive. Si conclude che il sistema e' determinato; si ricavano i valori dell'ultima, penultima, ..., prima incognita della lista, per sostituzione dall'ultima, penultima, ..., prima equazione.

(3) Il sistema generale di  $n$  equazioni scalari lineari in  $n$  incognite scalari  $x_1, \dots, x_n$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases},$$

( $a_{ij}$  e  $b_i$  costanti in  $\mathbb{R}$ ) si puo' scrivere come una sola equazione vettoriale  $n$ -dimensionale in  $n$  incognite scalari

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} x_1 + \dots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

in breve

$$\mathbf{a}_{\bullet 1}x_1 + \dots + \mathbf{a}_{\bullet n}x_n = \mathbf{b}$$

( $\mathbf{a}_{\bullet j}$  e  $\mathbf{b}$  in  $\mathbb{R}^n$ ), oppure come una sola equazione vettoriale  $n$ -dimensionale in una incognita vettoriale  $n$ -dimensionale

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

in breve

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

( $A$  matrice  $n \times n$ ,  $\mathbf{b}$  in  $\mathbb{R}^n$ , e  $\mathbf{x}$  incognita in  $\mathbb{R}^n$ ).

(4) Ricordiamo che per una matrice quadrata  $A$   $n \times n$  le seguenti proprieta' sono equivalenti, e ciascuna di esse puo' essere presa come definizione di matrice non singolare:

- le  $n$  righe di  $A$  sono linearmente indipendenti;
- le  $n$  colonne di  $A$  sono linearmente indipendenti;
- il determinante di  $A$  e' diverso da zero;
- $A$  e' invertibile.

(5) Si e' data la seguente versione del teorema di Cramer (che riassume il Teorema 8.10 e le considerazioni successive del testo).

Teorema (Cramer). Un sistema di  $n$  equazioni in  $n$  incognite

$$(*) \quad A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

( $A$  matrice  $n \times n$ ,  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ ) e' determinato se e solo se la matrice dei coefficienti  $A$  e' non singolare; in tal caso, la soluzione del sistema lineare e' data da

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}.$$

Nei termini dei determinanti, la soluzione del sistema si puo' dare nella forma

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

oppure

$$x_i = \frac{\det(B_i)}{\det(A)} \quad i = 1, \dots, n$$

dove  $B_i$  e' la matrice ottenuta da  $A$  sostituendo  $\mathbf{b}$  alla  $i$ -ma colonna.

Dimostrazione parziale. Supponiamo che la matrice  $A$  sia non singolare, ed interpretiamo questa ipotesi nel senso che  $A$  sia invertibile. Consideriamo l'equazione (\*), moltiplicando entrambi i membri a sinistra per  $A^{-1}$  otteniamo l'equazione  $A^{-1}(A\mathbf{x}) = A^{-1}\mathbf{b}$ ; per la proprieta' associativa del prodotto di matrici, per la proprieta' a sinistra della matrice inversa, e per la proprieta' della matrice unita', si ha  $A^{-1}(A\mathbf{x}) = (A^{-1}A)\mathbf{x} = I_n\mathbf{x} = \mathbf{x}$ . Abbiamo cosi' mostrato che, se il sistema ha una soluzione, allora deve essere  $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ . D'altro canto, sostituendo  $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$  nella equazione (\*), si ha l'uguaglianza  $A(A^{-1}\mathbf{b}) = \mathbf{b}$ , che e' soddisfatta in quanto per la proprieta' associativa del prodotto di matrici, per la proprieta' a destra della matrice inversa, e per la proprieta' della matrice unita', si ha  $A(A^{-1}\mathbf{b}) = (AA^{-1})\mathbf{b} = I_n\mathbf{b} = \mathbf{b}$ .

Applicazione. E' dato il sistema nelle incognite  $x, y$

$$\begin{cases} ax_1 + 2x_2 = 2 \\ 2x_1 + \frac{a}{4}x_2 = 1 \end{cases}$$

dove  $a$  e' un parametro reale. Ci si chiede per quali valori di  $a$  il sistema e' determinato e per tali valori determinare la soluzione.

Il determinante della matrice dei coefficienti e'

$$\det \begin{pmatrix} a & 2 \\ 2 & \frac{a}{4} \end{pmatrix} = \frac{a^2}{4} - 4$$

dunque il sistema e' determinato se e solo se

$$\frac{a^2}{4} - 4 \neq 0, \quad \text{cioe' } a \neq \pm 4.$$

Per i valori di  $a$  che soddisfano questa condizione, la soluzione del sistema e' data da

$$x_1 = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & \frac{a}{4} \end{pmatrix}}{\frac{a^2}{4} - 4} = \dots$$

$$x_2 = \frac{\det \begin{pmatrix} a & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}{\frac{a^2}{4} - 4} = \dots$$

(6) Il sistema generale di  $m$  equazioni scalari lineari in  $n$  incognite scalari  $x_1, \dots, x_n$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

( $a_{ij}$  e  $b_i$  costanti in  $\mathbb{R}$ ) si puo' scrivere come una sola equazione vettoriale  $m$ -dimensionale in  $n$  incognite scalari

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \dots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

in breve

$$\mathbf{a}_{\bullet 1}x_1 + \dots + \mathbf{a}_{\bullet n}x_n = \mathbf{b}$$

( $\mathbf{a}_{\bullet j}$  e  $\mathbf{b}$  in  $\mathbb{R}^m$ ), oppure come una sola equazione vettoriale  $m$ -dimensionale in una incognita vettoriale  $n$ -dimensionale

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

in breve

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

( $A$  matrice  $m \times n$ ,  $\mathbf{b}$  in  $\mathbb{R}^m$ , e  $\mathbf{x}$  incognita in  $\mathbb{R}^n$ ).

(7) Ricordiamo le seguenti definizioni e teoremi sul rango di una matrice

- Definizione. Una sottomatrice  $M$  di ordine  $r$  di una matrice  $A$  si dice sottomatrice fondamentale di  $A$  se  $\det(M) \neq 0$  e per ogni sottomatrice  $N$  di ordine  $r + 1$  di  $A$  contenente  $M$  si ha  $\det(N) = 0$ . Teorema. Tutte le sottomatrici fondamentali di una stessa matrice  $A$  hanno lo stesso ordine, che viene detto rango di  $A$  ed indicato con  $\rho(A)$ .

- Definizione. Una sequenza di  $r$  righe di una matrice  $A$  si dice sequenza fondamentale di righe di  $A$  se e' linearmente indipendente e ogni sequenza di  $r + 1$  righe di  $A$  che la contiene e' linearmente dipendente. Teorema. Tutte le sequenze fondamentali di righe di una stessa matrice  $A$  sono formate dallo stesso numero di righe, che viene detto rango per righe di  $A$  ed indicato con  $\rho_r(A)$ .

- Definizione. Una sequenza di  $r$  colonne di una matrice  $A$  si dice sequenza fondamentale di colonne di  $A$  se e' linearmente indipendente e ogni sequenza di  $r + 1$  colonne di  $A$  che la contiene e' linearmente dipendente. Teorema. Tutte le sequenze fondamentali di colonne di una stessa matrice  $A$  sono formate dallo stesso numero di colonne, che viene detto rango per colonne di  $A$  ed indicato con  $\rho_c(A)$ .

- Teorema. Per ogni matrice  $A$ , il rango, il rango per righe, ed il rango per colonne coincidono:

$$\rho(A) = \rho_r(A) = \rho_c(A).$$

Questo Teorema puo' essere visto come una conseguenza del seguente Teorema: Una sottomatrice  $M$  quadrata di ordine  $r$  di una matrice  $A$  e' una sottomatrice fondamentale di  $A$  se e solo se sia la sequenza delle  $r$  righe di  $A$  che contiene  $M$  sia la sequenza delle  $r$  colonne di  $A$  che contiene  $M$  sono fondamentali.

Esempio. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le sequenze fondamentali di righe di  $A$  sono (a meno dell'ordine): (1) prima e seconda riga, (2) seconda e terza riga. Le sequenze fondamentali di colonne di  $A$  sono (a meno dell'ordine): (1) prima e seconda colonna, (2) prima e quarta colonna, (3) seconda e terza colonna (4) terza e quarta colonna. Ci sono 8 sottomatrici  $2 \times 2$  fondamentali di  $A$  ... Si ha

$$\rho(A) = \rho_r(A) = \rho_c(A) = 2.$$

(8)

Teorema (Rouche'-Capelli). Un sistema lineare di  $m$  equazioni in  $n$  incognite ha qualche soluzione se e solo se la matrice  $m \times n$  dei coefficienti e la matrice  $m \times (n + 1)$  ottenuta aggiungendole la colonna dei termini noti hanno lo stesso rango; in simboli: un sistema

$$Ax = \mathbf{b}$$



(  $A$  matrice  $m \times n$ ,  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$  ) ha qualche soluzione se e solo se

$$\rho(A) = \rho((A|\mathbf{b})).$$

Dimostrazione parziale tratteggiata. Proviamo che se  $\rho(A) = \rho((A|\mathbf{b}))$  allora il sistema  $Ax = \mathbf{b}$  ha qualche soluzione. Scriviamo il sistema nella forma

$$\mathbf{a}_{\bullet 1}x_1 + \cdots + \mathbf{a}_{\bullet n}x_n = \mathbf{b},$$

dove  $\mathbf{a}_{\bullet 1}, \dots, \mathbf{a}_{\bullet n}$  sono le colonne di  $A$ . Supponiamo per semplicità che le prime  $r$  colonne  $\mathbf{a}_{\bullet 1}, \dots, \mathbf{a}_{\bullet r}$  di  $A$  formino una sequenza fondamentale di colonne di  $A$ . Le colonne  $\mathbf{a}_{\bullet 1}, \dots, \mathbf{a}_{\bullet r}$  sono linearmente indipendenti, mentre le colonne  $\mathbf{a}_{\bullet 1}, \dots, \mathbf{a}_{\bullet r}, \mathbf{b}$  sono linearmente dipendenti in quanto  $\rho((A|\mathbf{b})) = \rho(A) = r$ . Dunque  $\mathbf{b}$  è combinazione lineare di  $\mathbf{a}_{\bullet 1}, \dots, \mathbf{a}_{\bullet r}$ , cioè esistono degli scalari  $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r$  tali che

$$\mathbf{a}_{\bullet 1}\bar{x}_1 + \cdots + \mathbf{a}_{\bullet r}\bar{x}_r = \mathbf{b}.$$

Si ha

$$\mathbf{a}_{\bullet 1}\bar{x}_1 + \cdots + \mathbf{a}_{\bullet r}\bar{x}_r + \mathbf{a}_{\bullet r+1}0 + \cdots + \mathbf{a}_{\bullet n}0 = \mathbf{b},$$

cioè  $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r, 0, \dots, 0)$  è una soluzione del sistema dato.

Applicazione. È dato il sistema nelle incognite  $x_1, x_2$

$$\begin{cases} hx_1 + x_2 = 0 \\ -hx_1 - 2x_2 = 1 \\ -x_2 = h \\ x_1 = 1 \end{cases}$$

dove  $h$  è un parametro reale. Ci si chiede per quali valori di  $h$  il sistema ha soluzioni.

Si può rispondere direttamente, senza usare alcuna teoria, ricavando i valori di  $x_1$  e  $x_2$  dalle ultime due equazioni e sostituendo tali valori nelle prime due equazioni ... si ottiene che il sistema ha soluzioni se e solo se  $h = 1$ .

Si può rispondere usando il teorema di Rouché'-Capelli. Consideriamo la matrice dei coefficienti del sistema e quella da essa ottenuta aggiungendo la colonna dei termini noti

$$A = \begin{pmatrix} h & 1 \\ -h & -2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (A|\mathbf{b}) = \left( \begin{array}{cc|c} h & 1 & 0 \\ -h & -2 & 1 \\ 0 & -1 & h \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

La sottomatrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

di  $A$  è una sottomatrice fondamentale di  $A$  e dunque  $\rho(A) = 2$ . Per il Teorema di Rouché'-Capelli, il sistema ha soluzione se e solo se

$$\rho((A|\mathbf{b})) = \rho(A) = 2;$$

cio' capita se e solo se ogni sottomatrice  $3 \times 3$  di  $(A|\mathbf{b})$  contenente  $M$  ha determinante nullo, cioe'

$$\det \begin{pmatrix} -h & -2 & 1 \\ 0 & -1 & h \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0, \quad \det \begin{pmatrix} h & 1 & 0 \\ 0 & -1 & h \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0,$$

... cioe'  $h = 1$ .