Registro Lezione di Algebra lineare del 22 novembre 2016.

Si sono considerati i sistemi lineari di m equazioni in n incognite, e si e' presentato un metodo per la risoluzione (cfr. Cap.8 Elementi di geometria e algebra lineare, Par.5.3 Sistemi generali e teorema di Rouche'-Capelli, p. 439); si sono considerati gli insiemi delle soluzioni dei sistemi lineari omogenei, se ne e' mostrata la struttura di spazio vettoriale, e si e' enunciato un teorema sulla loro dimensione (cfr. ... Teorema 8.15 p. 438).

(1) Risoluzione dei sistemi lineari. Esempi.

(2) Risoluzione dei sistemi lineari. Metodo generale.

(3) Sistemi lineari omogenei, struttura dell'insieme delle soluzioni. Esempi.

(4) Sistemi lineari omogenei, struttura dell'insieme delle soluzioni. Teorema generale.

(1) Risoluzione dei sistemi lineari. Esempi. In questa parte mostriamo su alcuni esempi un metodo per la risoluzione dei sistemi basato sui teoremi di Cramer e di Rouche'-Capelli.

Esempio 1. Consideriamo l'equazione nelle incognite x_1, x_2, x_3

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4.$$

Questa equazione ha piu' di una soluzione, e' indeterminata. Possiamo descrivere l'insieme delle soluzioni ricavando la prima incognita in funzione delle altre due, e lasciando queste due incognite libere di assumere qualsiasi valore in $\mathbb{R}$:

$$x_1 = -2x_2 - 3x_3 + 4; \quad x_2 = \ qualsiasi, \quad x_3 = \ qualsiasi.$$

In altri termini, le soluzioni dell'equazione sono date le terne $(-2s - 3t + 4, s, t)$ dove s, t sono due parametri liberi in $\mathbb{R}$. Si dice che l'equazione ha ∞^2 soluzioni.

Osservazione. Poiche' nella equazione lineare data ogni incognita compare con coefficiente diverso da 0, avremmo potuto ricavare una qualsiasi incognita in funzione delle altre due, e lasciare queste due incognite libere.

Esempio 2. Cosideriamo il seguente sistema di due equazioni nelle incognite x_1, x_2, x_3

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ 2x_1 - 5x_2 + 8x_3 = 9 \end{cases}.$$

La matrice dei coefficienti di x_1 e x_2 e' non singolare, in quanto

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} = -1,$$

dunque possiamo ricavare le incognite x_1 e x_2 in funzione della x_3, e lasciare x_3 libera di assumere qualsiasi valore in $\mathbb{R}$; specificamente, riscriviamo il sistema nella forma

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -3x_3 + 4 \\ 2x_1 - 5x_2 = -8x_3 + 9 \end{cases},$$

applichiamo la regola di Cramer ed otteniamo

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\det\begin{pmatrix} -3x_3+4 & -2 \\ -8x_3+9 & -5 \end{pmatrix}}{-1} = x_3 + 2 \\ x_2 &= \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & -3x_3+4 \\ 2 & -8x_3+9 \end{pmatrix}}{-1} = 2x_3 - 1 \\ x_3 &= \ \mathit{qualsiasi}. \end{aligned}$$

In altri termini, le soluzioni del sistema sono date le terne $(t+2, 2t-1, t)$ dove t e' un parametro libero in $\mathbb{R}$. Si dice che il sistema ha ∞^1 soluzioni.

Osservazione. Poiche' nel sistema lineare dato la matrice dei coefficienti di due qualsiasi incognite e' non singolare, avremmo potuto ricavare due qualsiasi incognite in funzione della rimanente, e lasciare questa incognita libera.

Esempio 3. Consideriamo il sistema di quattro equazioni nelle incognite x_1, x_2, x_3

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 8x_2 + 10x_3 = 3 \\ 2x_1 + 2x_3 = 1 \end{cases}.$$

La matrice A dei coefficienti e la colonna $\mathbf{b}$ dei termini noti sono date da

$$(A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & 8 & 10 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right).$$

Osserviamo che le prime due righe sono linearmente indipendenti.

Ci chiediamo se la terza riga e' combinazione lineare delle prime due. Considerando l'ultima componente si ha che il coefficiente della prima riga dovrebbe essere 3; considerando la prima componente si ha che il coefficiente della seconda riga dovrebbe essere -1. Considerando le altre componenti si verifica che effettivamente la terza riga e' combinazione lineare delle prime due righe, con coefficienti 3 e -1.

In modo simile si trova che la quarta riga e' somma delle prime due righe.

Queste osservazioni significano in particolare che nel sistema, la terza e la quarta equazione sono combinazione lineare delle prime due, dunque sono conseguenze delle prima due, ed il sistema delle quattro equazioni e' equivalente al sistema delle prime due:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}.$$

La matrice dei coefficienti delle incognite x_1, x_2 e' non singolare, dunque possiamo procedere come nell'esempio precedente ... il sistema ha ∞^1 soluzioni.

Osservazione. Abbiamo osservato che le prime due righe della matrice $(A|\mathbf{b})$ sono fondamentali, e dunque che il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ e' equivalente al sistema delle prime due equazioni. Si puo' anche osservare che ogni due righe della matrice $(A|\mathbf{b})$ sono linearmente indipendenti. Per i teoremi generali sul rango di una matrice, si puo' affermare che ogni due righe della matrice $(A|\mathbf{b})$ sono fondamentali, e dunque che il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ e' equivalente al sistema di due qualsiasi sue equazioni.

Esempio 3'. Consideriamo il sistema dell'esempio precedente, ma con i termini noti parametri b_1, b_2, b_3, b_4, e ci chiediamo sotto quali condizioni il sistema ha soluzioni, e quante ne ha. Rispondiamo senza usare le informazioni gia' acquisite, e in modo un po' meccanico.

La matrice A dei coefficienti e la colonna $\mathbf{b}$ dei termini noti sono date da

$$(A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{rrr|l} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 1 & -2 & -1 & b_2 \\ 2 & 8 & 10 & b_3 \\ 2 & 0 & 2 & b_4 \end{array}\right).$$

Consideriamo la matrice A. Il determinante della sottomatrice M costituita dagli elementi comuni alle prime due righe e alle prime due colonne e'

$$\det(M) = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = -4 \neq 0.$$

I determinati delle sottomatrici 3×3 di A che contengono M sono dati da

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 8 & 10 \end{pmatrix} = ... = 0$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = ... = 0.$$

Dunque la sottomatrice M 2×2 e' fondamentale in A e $\rho(A) = 2$.

Per il teorema di Rouche'-Capelli il sistema ha soluzioni se e solo se $\rho(A|\mathbf{b}) = \rho(A) = 2$. Cio' capita se e solo se le sottomatrici 3×3 di $(A|\mathbf{b})$ che contengono M hanno determinante nullo, cioe'

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & b_1 \\ 1 & -2 & b_2 \\ 2 & 8 & b_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & b_1 \\ 1 & -2 & b_2 \\ 2 & 0 & b_4 \end{pmatrix} = 0$$

cioe'

$$\begin{cases} 12b_1 - 4b_2 - 4b_3 = 0 \\ \ \ 4b_1 + 4b_2 - 4b_4 = 0 \end{cases}$$

Per ciascuna quaterna di parametri soddisfacente queste condizioni, il sistema e' equivalente al sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = b_1 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = b_2 \end{cases},$$

... che ha ∞^1 soluzioni.

(2) Risoluzione dei sistemi lineari. Metodo generale.

In generale, sia

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (A \text{ matrice } m \times n)$$

un sistema lineare di m equazioni in n incognite.

- se $\rho(A) < \rho(A|\mathbf{b})$, allora per il teorema di Rouche'-Capelli il sistema non ha soluzioni;

- se $\rho(A) = \rho(A|\mathbf{b})$ allora per il teorema di Rouche'-Capelli il sistema ha soluzioni. Sia M una sottomatrice $r \times r$ fondamentale di A; suppongo per semplicita' che M sia costituita dagli elementi di A comuni alle prime r righe ed alle prime r colonne di A. Allora nella matrice $(A|\mathbf{b})$ le ultime $m - r$ righe sono combinazioni lineari delle prime r, e nel sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ le ultime $m - r$ equazioni sono conseguenze delle prime r. Il sistema dato e' equivalente al sistema

$$\begin{pmatrix} a_{1\bullet} \\ \hline \vdots \\ \hline a_{r\bullet} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_r \end{pmatrix};$$

questo sistema si puo' riscrivere come

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1r}x_r = -a_{1,r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{1n}x_n + b_1 \\ \vdots \\ a_{r1}x_1 + \cdots + a_{rr}x_r = -a_{r,r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{rn}x_n + b_r \end{cases};$$

si ha

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} \end{pmatrix} = \det(M) \neq 0,$$

dunque, per il teorema di Cramer, per ogni $(\bar{x}_{r+1}, \dots, \bar{x}_n) \in \mathbb{R}^{n-r}$ esiste una ed una sola $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r) \in \mathbb{R}^r$ tale che $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r, \bar{x}_{r+1}, \dots, \bar{x}_n)$ sia soluzione del sistema. Se $r = n$, il sistema e' determinato, mentre se $r < n$ il sistema e' indetermninato, ed ha infinite soluzioni che dipendono da $n - r$ parametri liberi; in ogni caso si dice che il sistema ha ∞^{n-r} soluzioni.

(3) Sistemi lineari omogenei, struttura delle soluzioni. Esempi. In questa parte mostriamo su alcuni esempi come l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo in tre incognite possa essere descritto nei termini dell'algebra dei vettori dello spazio. Identifichiamo i vettori di $\mathbb{R}^3$ con i vettori dello spazio applicati in un fissato punto origine O.

Esempio 1. Consideriamo l'equazione linerare omogenea nelle incognite x_1, x_2, x_3

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0.$$

Questa equazione ha ∞^2 soluzioni, date da

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2s-3t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

in breve

$$\mathbf{x} = s\mathbf{v} + t\mathbf{u}$$

dove s, t sono due parametri che variano liberamente in $\mathbb{R}$. Osserviamo che i vettori $\mathbf{v}, \mathbf{u}$ sono linearmente indipendenti, e che le soluzioni dell'equazione sono tutti e soli i vettori che sono combinazione lineare di $\mathbf{v}, \mathbf{u}$. Le soluzioni dell'equazione sono rappresentate dai vettori dello spazio che stanno nel piano per O contenente $\mathbf{v}, \mathbf{u}$. L'insieme delle soluzioni dell'equazione e' dunque uno spazio vettoriale di dimensione 2.

Esempio 2. Consideriamo il sistema lineare di due equazioni omogenee nelle incognite x_1, x_2, x_3

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ \phantom{x_1 + {}} x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Questo sistema ha ∞^1 soluzioni, date da

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -2t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

in breve

$$\mathbf{x} = t\mathbf{u}$$

dove t e' un parametro che varia liberamente in $\mathbb{R}$. Le soluzioni del sistema sono rappresentate dai vettori dello spazio che stanno sulla retta per O contenente $\mathbf{u}$. L'insieme delle soluzioni del sistema e' dunque uno spazio vettoriale di dimensione 1.

Esempio 3. Consideriamo il sistema lineare di tre equazioni omogenee nelle incognite x_1, x_2, x_3

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ \phantom{x_1 + {}} x_2 + 2x_3 = 0 \\ \phantom{x_1 + x_2 + {}} x_3 = 0 \end{cases}.$$

Questo sistema ha solo la soluzione banale $(0,0,0)$. L'unica soluzione del sistema e' rappresentata dal punto O. L'insieme delle soluzioni del sistema e' dunque uno spazio vettoriale di dimensione 0.

(4) Sistemi lineari omogenei, struttura dell'insieme delle soluzioni. Teorema generale. L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo ha una struttura naturale di spazio vettoriale, come specificato dalla seguente.

Proposizione. Sia $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ un sistema lineare omogeneo di m equazioni in n incognite, e sia $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^n$ l'insieme delle sue soluzioni. Allora $\mathcal{S}$ e' non vuoto e

1. per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{S}$, anche $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathcal{S}$;

2. per ogni $\mathbf{u} \in \mathcal{S}$ ed ogni $t \in \mathbb{R}$, anche $t\mathbf{u} \in \mathcal{S}$;

3. l'insieme $\mathcal{S}$, con le operazioni di somma e prodotto per scalari ereditate da $\mathbb{R}^n$, e' uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

Dimostrazione. $\mathcal{S}$ non e' vuoto in quanto contiene almeno il vettore nullo $\mathbf{0}$ di $\mathbb{R}^n$.

1. l'ipotesi che $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ siano soluzioni del sistema significa che $A\mathbf{u} = \mathbf{0}$ e $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$; da cio' segue che $A\mathbf{u} + A\mathbf{v} = \mathbf{0} + \mathbf{0}$ e $A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{0}$; cio' significa che $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ e' una soluzione del sistema.

2. si ha $A\mathbf{u} = \mathbf{0}$; da cio' segue che $t(A\mathbf{u}) = t\mathbf{0}$ e $A(t\mathbf{u}) = \mathbf{0}$; cio' significa che $t\mathbf{u}$ e' una soluzione del sistema.

3. l'insieme $\mathcal{S}$ contiene il vettore nullo e per ogni suo vettore anche il vettore opposto, e' chiuso rispetto alle operazioni di somma e prodotto per scalari definite in $\mathbb{R}^n$ e queste operazioni continuano a soddisfare su $\mathcal{S}$ le identita' che soddisfano su $\mathbb{R}^n$.

La dimensione dello spazio vettoriale delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo e' data dal seguente

Teorema (cfr. ... Teorema 8.15 p. 438). Sia $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ un sistema lineare omogeneo di m equazioni in n incognite, e sia $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^n$ l'insieme delle sue soluzioni. Allora la dimensione di $\mathcal{S}$ e' data dalla differenza fra il numero delle incognite e il rango della matrice dei coefficienti, in simboli

$$\dim(\mathcal{S}) = n - \rho(A).$$

(Non svolto a lezione. Facoltativo.

Teorema (cfr. ... Teorema 8.16 p. 438). Sia $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ un sistema lineare che possegga qualche soluzione, sia $\bar{\mathbf{x}}$ una sua soluzione particolare, e sia $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ il sistema lineare omogeneo che ha la stessa matrice dei coefficienti. Allora le soluzioni del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sono tutti e soli i vettori del tipo

$$\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{y},$$

dove $\mathbf{y}$ varia fra le soluzioni del sistema omogeneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Dimostrazione parziale. Per ogni vettore $\mathbf{y}$ soluzione del sistema omogeneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ si ha $A(\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{y}) = A\bar{\mathbf{x}} + A\mathbf{y} = \mathbf{b} + \mathbf{0} = \mathbf{b}$, cioe' il vettore $\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{y}$ e' soluzione del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.)