Registro Lezione di Algebra lineare del 23 novembre 2016.

(1) Matrici diagonali.

(2) Autovettori e autovalori.

(3) Ricerca degli autovalori, polinomio caratteristico.

(4) Ricerca degli autovettori, autospazi.

(5) Matrici diagonalizzabili.

(1) Matrici diagonali.

Le matrici diagonali sono le matrici quadrate del tipo

$$(a), \quad \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, \quad \ldots$$

In altri termini, una matrice quadrata $A = (a_{ij})$ si dice diagonale se $a_{ij} = 0$ per ogni $i \neq j$.

Per le matrici diagonali, il determinante, il rango, la non singolarita', le operazioni di prodotto e di inversione sono particolarmente semplici. E semplici sono le funzioni lineari associate a matrici diagonali.

Per ciascuna matrice diagonale $n \times n$

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$$

si ha

- il determinante e' il prodotto degli elmenti diagonali:

$$\det(D) = d_1 \cdots d_n;$$

- il rango e' il numero degli elementi diagonali non nulli:

$$\rho(A) = \text{ numero degli } i : \; d_i \neq 0;$$

- la nonsingolarita' significa che tutti gli elementi diagonali sono non nulli: $d_i \neq 0$ per ogni $i = 1, \ldots, n$;

- sotto questa condizione, l'inversa e' data da

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} d_1^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n^{-1} \end{pmatrix}.$$

- La funzione lineare $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ associata alla matrice D e' data da

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 x_1 \\ \vdots \\ d_n x_n \end{pmatrix}.$$

- Il prodotto di due matrici diagonali e' dato da

$$\begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 f_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n f_n \end{pmatrix}.$$

Le matrici diagonali sono caratterizzate dalla seguente

Proposizione. Per una matrice A $n \times n$ le seguenti due proprieta' sono equivalenti
(1) A e' la matrice diagonale con elementi diagonali d_i $(i = 1, \ldots, n)$;
(2) $A\mathbf{e}_i = d_i \mathbf{e}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Dimostrazione parziale. (1) implica (2). Da

$$\begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 x_1 \\ \vdots \\ d_n x_n \end{pmatrix}$$

ponendo $\mathbf{x} = \mathbf{e}_i$ si ha

$$\begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & 0 \\ 0 & & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ d_i \\ \vdots \end{pmatrix} = d_i \begin{pmatrix} \vdots \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

(nei vettori colonna si intende che tutti gli elmenti sono nulli tranne quello della componente $i-$ma).

(2) Autovettori e autovalori.

Definizione. Siano A una matrice $n \times n$ e $\mathbf{v}$ un vettore non nullo di $\mathbb{R}^n$. Si dice che $\mathbf{v}$ e' un autovettore di A se $A\mathbf{v}$ e' parallelo a $\mathbf{v}$, cioe' esiste uno scalare $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$A\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v};$$

tale scalare e' unico e si dice autovalore di A associato a $\mathbf{v}$.

Due autovalori λ, μ associati allo stesso autovettore $\mathbf{v}$ devono coincidere in quanto $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ e $A\mathbf{v} = \mu\mathbf{v}$ implicano $\lambda\mathbf{v} = \mu\mathbf{v}$ cioe' $(\lambda - \mu)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ da cui, essendo $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, segue $\lambda - \mu = 0$, cioe' $\lambda = \mu$.

Nei termini di questa definizione, la proposizione del punto precedente si esprime dicendo che una matrice A $n \times n$ e' diagonale se e solo se ogni vettore fondamentale di $\mathbb{R}^n$ e' un autovettore di A; in tal caso, l'$i-$esimo elemento diagonale di A e' l'autovalore di A associato all'$i-$esimo vettore fondamentale $\mathbf{e}_i$ (per ogni $i = 1, \ldots, n$.)

Un paio di esempi di matrici non diagonali che posseggono qualche autovettore:

Esempio 1. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ e' un autovettore di A con autovalore associato 2, in quanto

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Esempio 2. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e' un autovettore di A con autovalore associato 0, in quanto

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ci sono matrici che non posseggono alcun autovettore reale:

Esempio 3. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ e' un autovettore di A se e solo se esiste un $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

cioe'

$$\begin{cases} -x_2 = \lambda x_1 \\ \quad x_1 = \lambda x_2 \end{cases}$$

Si verifica che nel campo dei numeri reali queste uguaglianze possono sussistere solo se $x_1 = x_2 = 0$; dunque A non ha autovettori (e dunque nemmeno autovalori) reali.

(3) Ricerca degli autovalori, polinomio caratteristico.

Consideriamo una matrice $n \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Sia λ uno scalare. Per definizione, λ e' un autovalore di A se e solo se esiste un vettore $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ in $\mathbb{R}^n$ che soddisfa l'uguaglianza

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}.$$

L'uguaglianza $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. equivale all'uguaglianza $(A - \lambda I_n)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. L'uguaglianza

$$(A - \lambda I_n)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

e' soddisfatta da qualche vettore $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ in $\mathbb{R}^n$ se e solo se

$$\det (A - \lambda I_n) = 0.$$

Si ha che

$$\begin{aligned} \det (A - \lambda I_n) &= \det \left(\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e' un polinomio nella variabile λ.

Questi argomenti suggeriscono la seguente

Definizione. Per ogni matrice A $n \times n$, il polinomio $\det (A - \lambda I_n)$ si dice polinomio caratteristico di A.

e possono essere riassunti e completati nel seguente

Teorema. Sia A una matrice $n \times n$. Gli autovalori di A sono le radici del polinomio caratteristico di A, cioe' le soluzioni dell'equazione

$$\det (A - \lambda I_n) = 0.$$

$\det (A - \lambda I_n)$ e' un polinomio di grado n in λ.

Esempio 1. La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

ha polinomio caratteristico

$$\det \begin{pmatrix} 3 - \lambda & 2 \\ 1 & 4 - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 7\lambda + 10;$$

l'equazione $\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$ ha soluzioni $\lambda = 2$ e $\lambda = 5$, e questi sono gli autovalori di A.

Esempio 2. La matrice
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
ha polinomio caratteristico
$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2;$$
l'equazione $\lambda^2 = 0$ ha soluzione $\lambda = 0$ (con molteplicita' 2), e questo e' l'unico autovalore di A (con molteplicita' 2).

Esempio 3. La matrice
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
ha polinomio caratteristico
$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1;$$
l'equazione $\lambda^2 + 1 = 0$ non ha soluzioni reali (ne ha in $\mathbb{C}$). Dunque questa matrice non ha ne' autovalori ne' autovettori reali.

Esempio 4. La generica matrice 2×2
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
ha polinomio caratteristico
$$\det \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - (a+c)\lambda + ad - bc.$$
Dunque la matrice ha due autovalori reali distinti, oppure reali coincidenti, oppure complessi coniugati non reali secondo che $\Delta = (a+c)^2 - 4(ad-bc)$ sia magguiore, uguale o minore di 0.

(4) Ricerca degli autovettori, autospazi.

Consideriamo una matrice A $n \times n$. Per ogni scalare λ, l'insieme delle soluzioni dell'equazione nell'incognita $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$
$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}, \quad \text{cioe'} \quad (A - \lambda I_n)\mathbf{x} = \mathbf{0},$$
e' uno spazio vettoriale contenuto in $\mathbb{R}^n$, che consiste del vettore nullo e degli eventuali autovettori di A associati a λ. Se λ e' un autovalore di A, questo spazio si dice autospazio di A associato a λ e si indica con $\mathcal{V}_\lambda$.

Esempio 1. Sappiamo che la matrice
$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

ha autovalori $\lambda = 2$ e $\lambda = 5$.

L'autospazio $\mathcal{V}_2$ di A associato all'autovalore $\lambda = 2$ e' l'insieme delle soluzioni dell'equazione $(A - 2I_2)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ nell'incognita $\mathbf{x}$ in $\mathbb{R}^2$, cioe' l'insieme delle soluzioni del sistema di due equazioni nelle incognite x_1, x_2

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

questo sistema equivale alla sola equazione

$$x_1 + 2x_2 = 0;$$

le soluzioni sono date da

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (x_2 \in \mathbb{R}).$$

Nel piano riferito ad un sistema di coordinate cartesiane, l'autospazio $\mathcal{V}_2$ e' rappresentato una retta, passante per l'origine.

L'autospazio $\mathcal{V}_5$ di A associato all'autovalore $\lambda = 5$ e' l'insieme delle soluzioni dell'equazione $(A - 5I_2)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ nell'incognita $\mathbf{x}$ in $\mathbb{R}^2$, cioe' l'insieme delle soluzioni del sistema di due equazioni nelle incognite x_1, x_2

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

questo sistema equivale alla sola equazione

$$x_1 - x_2 = 0;$$

le soluzioni sono date da

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (x_2 \in \mathbb{R}).$$

Nel piano riferito ad un sistema di coordinate cartesiane, l'autospazio $\mathcal{V}_5$ e' rappresentato una retta, passante per l'origine.

Si osservi che gli autospazi $\mathcal{V}_2$ e $\mathcal{V}_5$ sono rappresentati da due rette distinte.

Esempio 2. Sappiamo che la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ha il solo autovalore $\lambda = 0$ (con moltepliciota' 2).

L'autospazio $\mathcal{V}_0$ di A associato all'autovalore $\lambda = 0$ e' l'insieme delle soluzioni dell'equazione $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ nell'incognita $\mathbf{x}$ in $\mathbb{R}^2$, cioe' l'insieme delle soluzioni del sistema di due equazioni nelle incognite x_1, x_2

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

questo sistema equivale alla sola equazione

$$x_2 = 0;$$

le soluzioni sono date da

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (x_1 \in \mathbb{R}).$$

Nel piano riferito ad un sistema di coordinate cartesiane, l'autospazio $\mathcal{V}_0$ e' rappresentato dal primo asse del riferimento.

Esempio 3. La matrice dell'esempio 3, non avendo autovalori, non ha autospazi.

(5) Matrici diagonalizzabili.

Definizione. Sia A una matrice $n \times n$. Si dice che A e' diagonalizzabile se esiste una base di $\mathbb{R}^n$ costituita da autovettori di A, in altri termini, se esistono $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ base di $\mathbb{R}^n$ e $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ scalari in $\mathbb{R}$ tali che

$$A\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i, \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Nella notazione della definizione, la funzione lineare

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$$

associata alla matrice diagonalizzabile A puo' essere convenientemente rappresentata rispetto alla base $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ degli autovettori nel modo seguente:

$$\begin{aligned} x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_n\mathbf{v}_n \mapsto & A(x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_n\mathbf{v}_n) \\ = & x_1(A\mathbf{v}_1) + \cdots + x_n(A\mathbf{v}_n) \\ = & (\lambda_1 x_1)\mathbf{v}_1 + \cdots + (\lambda_n x_n)\mathbf{v}_n; \end{aligned}$$

in altri termini, al vettore in entarata di coordinate $(x_1, \ldots, x_n)$ corrisponde in uscita il vettore di coordinate $(\lambda_1 x_1, \ldots, \lambda_n x_n)$.

Esempio 1. Sappiamo che la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

ha due autovalori $\lambda = 2$ e $\lambda = 5$, cui corrispondono due autospazi $\mathcal{V}_2$ e $\mathcal{V}_5$ che sono rappresentati nel piano da due distinte rette per l'origine. Prendendo un qualunque vettore non nullo in ciascuno dei due autospazi, si ottengono due vettori che formano una base di $\mathbb{R}^2$. Prendiamo

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{V}_2, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{V}_5.$$

La funzione lineare

$$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$$

e′ descritta, rispetto alla base canonica, dalla

$$x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} \mapsto (3x_1 + 2x_2)\mathbf{i} + (x_1 + 4x_2)\mathbf{j},$$

ed e′ descritta, rispetto alla base degli autovettori, dalla

$$x_1\mathbf{u} + x_2\mathbf{v} \mapsto (2x_1)\mathbf{u} + (5x_2)\mathbf{v}.$$

Esempio 2. Sappiamo che la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ha un solo autovalore $\lambda = 0$ di molteplicita′ 2, cui corrisponde un autospazio $\mathcal{V}_0$ che e′ rappresentato nel piano da una retta per l′origine. Non esistono due autovettori di A linearmente indipendenti, dunque non esiste alcuna base di $\mathbb{R}^2$ costituita da autovettori di A, e A non e′ diagonalizzabile.