Registro Lezione di Algebra lineare del 30 novembre 2016.

Ricostruzione di una matrice diagonalizzabile dai suoi autovettori e autovalori.

Teotrema. Sia A una matrice $n \times n$, diagonalizzabile. Supponiamo di conoscere n autovettori $v_1, \ldots, v_n$ di A che formano una base di $\mathbb{R}^n$, con autovalori associati $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Allora possiamo ricostruire A come segue. Indicate con P la matrice $n \times n$ che ha per colonne gli autovettori di A e con D la matrice diagonale $n \times n$ che ha per elementi diagonali gli autovalori di A

$$P = \left(\begin{array}{c|c|c} v_1 & \cdots & v_n \end{array} \right), \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

si ha

$$A = PDP^{-1}.$$

Dimostrazione. Il complesso delle n uguaglianze fra vettori colonna $n \times 1$

$$Av_1 = v_1\lambda_1, \ldots, Av_n = v_n\lambda_n,$$

e' equivalente all'unica uguaglianza fra matrici $n \times n$

$$\left(\begin{array}{c|c|c} Av_1 & \cdots & Av_n \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c|c} v_1\lambda_1 & \cdots & v_n\lambda_n \end{array} \right)$$

che si puo' esprimere come

$$A \left(\begin{array}{c|c|c} v_1 & \cdots & v_n \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c|c} v_1 & \cdots & v_n \end{array} \right) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

e sinteticamente

$$AP = PD.$$

Ora, essendo $v_1, \ldots, v_n$ linearmente indipendenti, la matrice P e' invertibile, dunque possiamo ricavare

$$A = PDP^{-1}.$$

Esempio. Abbiamo visto che la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ possiede gli autovettori $u = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ con autovalori rispettivi 2 e 5. Allora, posto

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

si ha

$$PDP^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \ldots = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = A.$$

Basi ortonormali, matrici ortogonali.

Ricordiamo che nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ abbiamo definito il prodotto scalare di due vettori $u = (u_i)_1^n$ e $v = (v_i)_1^n$ come lo scalare $u \cdot v = \sum_1^n u_i v_i$. A partire dal prodotto scalare, abbiamo definito la relazione di ortogonalita' ponendo $u \perp v$ se e solo se $u \cdot v = 0$ e la lunghezza di un vettore ponendo $|v| = \sqrt{v \cdot v}$. Nello spazio, due vettori (non nulli e) ortogonali sono independenti, e tre vettori (non nulli e) ortogonali sono una base. Questo fatto si generalizza allo spazio $\mathbb{R}^n$, nel senso della seguente

Proposizione. Una qualsiasi sequenza di m vettori di $\mathbb{R}^n$ non nulli e a due a due ortogonali e' linearmente indipendente; in particolare, per $m = n$ essa e' una base di $\mathbb{R}^n$.

Dimostrazione. Siano $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n$ non nulli e a due a due ortogonali. Considero l'equazione fra vettori

$$x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n = 0$$

nelle incognite scalari $x_1, \ldots, x_n$. Sia i un indice fissato fra 1 ed n; moltiplico (nel senso del prodotto scalare) entrambi i membri per v_i ed ottengo l'equazione scalare

$$v_i \cdot (x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n) = v_i \cdot 0$$

cioe'

$$x_1(v_i \cdot v_1) + \cdots + x_n(v_i \cdot v_n) = 0;$$

essendo v_i ortogonale ad ognoi altro vettore v_j, tutti i prodotti scalari sono nulli tranne l'$i-$mo e si ottiene

$$x_i(v_i \cdot v_i) = 0;$$

essendo $v_i \neq 0$, si ha $(v_i \cdot v_i) \neq 0$, da cui $x_i = 0$. Dunque i vettori $v_1, \ldots, v_n$ sono linearmente indipendenti.

Definizione. Una sequenza di n vettori di $\mathbb{R}^n$ a due a due ortogonali si dice base ortogonale di $\mathbb{R}^n$; una sequenza di n versori di $\mathbb{R}^n$ a due a due ortogonali si dice base ortonormale di $\mathbb{R}^n$. In particolare, $v_1, \ldots, v_n$ ($v_i \in \mathbb{R}^n$) e' una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ se e solo se

$$v_i \cdot v_j = \begin{cases} 1 & \text{per } i = j \\ 0 & \text{per } i \neq j \end{cases}.$$

Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$, i vettori fondamentali $e_1, e_2, \ldots, e_n$ formano una base ortogonale, anzi ortonormale. Nello uno spazio vettoriale delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo, in generale non c'e' una base ortogonale "ovvia". Di seguito mostriamo un algoritmo che a partire da una qualsiasi base dello spazio vettoriale fornisce una base ortogonale.

Osservazione. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione due contenuto in qualche spazio $\mathbb{R}^n$, sia a, b ($a, b \in V$) una base di V, e sia $b = b_{||} + b_{\perp}$ la scomposizione di b in componenti parallela ed ortogonale ad a. Allora, $a, b_{\perp}$ e' una base ortogonale di V. (Infatti: i vettori $a, b_\perp$ sono ortogonali e non nulli - altrimenti a e b sarebbero linearmente dipendenti).

In generale, si ha il seguente

Teorema (Algoritmo di Gram-Schmidt). Siano $a, b, c, \ldots, d, e$ vettori che formano una base di uno spazio vettoriale V contenuto in un qualche spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$. Allora i seguenti vettori $a', b', c', \ldots, d', e'$ formano una base ortogonale di V :

$$\begin{aligned}
a' &= a \\
b' &= b - \frac{a' \cdot b}{a' \cdot a'} a' \\
c' &= c - \frac{a' \cdot c}{a' \cdot a'} a' - \frac{b' \cdot c}{b' \cdot b'} b' \\
&\vdots \\
e' &= e - \frac{a' \cdot e}{a' \cdot a'} a' - \frac{b' \cdot e}{b' \cdot b'} b' - \cdots - \frac{d' \cdot e}{d' \cdot d'} d'
\end{aligned}$$

Esempio. Consideriamo l'equazione lineare omogenea in x_1, x_2, x_3, x_4

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0.$$

Le soluzionmi di questa equazione formano uno spazio vettoriale di dimensione 3. Una base e' data dai vettori

$$a = (-1, 1, 0, 0), \quad b = (-1, 0, 1, 0), \quad c = (-1, 0, 1, 0).$$

Questi vettori non sono ortogonali; una base ortogonale e' data da

$$\begin{aligned}
a' &= a = (-1, 1, 0, 0), \\
b' &= b - \frac{a' \cdot b}{a' \cdot a'} a' \\
&= (-1, 0, 1, 0) - 1/2(-1, 1, 0, 0) \\
&= (-1/2, -1/2, 1, 0), \\
c' &= c - \frac{a' \cdot c}{a' \cdot a'} a' - \frac{b' \cdot c}{b' \cdot b'} b' \\
&= (-1, 0, 0, 1) - 1/2(-1, 1, 0, 0) - (1/2)/(3/2)(-1/2, -1/2, 1, 0) \\
&= (-1/3, -1/3, -1/3, 1).
\end{aligned}$$

Teorema. Per una matrice Q $n \times n$ le seguenti proprieta' sono equivalenti:

1. le n colonne di Q formano una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$;
2. le n righe di Q formano una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$;
3. Q e' invertibile e la sua inversa coincide con la sua trasposta:

$$QQ^T = I_n = Q^T Q.$$

Dimostrazione parziale. Proviamo che se le colonne di Q sono una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ allora $Q^TQ = I_n$. Infatti, indicate con $q_1, q_2, \ldots, q_n$ le colonne di Q, si ha

$$
\begin{aligned}
Q^TQ &= \left(\begin{array}{c} q_1^T \\ \hline q_2^T \\ \hline \vdots \\ \hline q_n^T \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c|c|c} q_1 & q_2 & \cdots & q_n \end{array} \right) \\
&= \begin{pmatrix} q_1^Tq_1 & q_1^Tq_2 & \cdots & q_1^Tq_n \\ q_2^Tq_1 & q_2^Tq_2 & \cdots & q_2^Tq_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_n^Tq_1 & q_n^Tq_2 & \cdots & q_n^Tq_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = I_n
\end{aligned}
$$

Definzione. Una matrice che possiede una delle (e dunque tutte le) proprieta' elencate nel teorema precedente si dice matrice ortogonale.

Esempio. I vettori $(1/\sqrt{5})(1,2)$ e $(1/\sqrt{5})(-2,1)$ formano una base ortonormale di $\mathbb{R}^2$; la matrice che li ha come colonne

$$
\begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}
$$

e' una matrice ortogonale (si noti che anche le due righe formano una base ortonormale di $\mathbb{R}^2$).

Esempio. I vettori $(1,2)$ e $(-2,1)$ formano una base ortogonale ma non ortonormale di $\mathbb{R}^2$; la matrice che li ha come colonne

$$
\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}
$$

non e' una matrice ortogonale (si noti che le due righe non formano nemmeno una base ortogonale di $\mathbb{R}^2$).

Diagonalizzazione delle matrici simmetriche.

Definizione. Una matrice $A = (a_{ij})$ $n \times n$ si dice simmetrica se $a_{ij} = a_{ji}$ per ogni $i, j = 1, \ldots, n$, cioe' se $A^T = A$.

Esempi. Le matrici simmetriche 2×2 sono date da

$$
\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \qquad (a, b, c \in \mathbb{R}).
$$

Le matrici simmetriche 3×3 sono date da

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} \qquad (a, b, \ldots, f \in \mathbb{R}).$$

Sia $p(\lambda) = c_n\lambda^n + \cdots + c_1\lambda + c_0$ (con $c_n \neq 0$) un polinomio non costante a coefficienti reali in una variabile λ; si dice che $p(\lambda)$ si fattorizza copletamente su $\mathbb{R}$ se esistono n numeri reali λ_i (non necessariamente distiniti) tali che

$$p(\lambda) = c_n(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n);$$

in altri termini, $p(\lambda)$ ha almeno una radice reale e, indicate con $\mu_1, \ldots, \mu_r$ le sue radici reali distinte, si ha

$$p(\lambda) = c_n(\lambda - \mu_1)^{m_1}(\lambda - \mu_2)^{m_2}\cdots(\lambda - \mu_r)^{m_r},$$

dove $m_1 + \cdots + m_r = n$; per ogni i, l'esponente m_i si dice molteplicita' della radice μ_i.

Proposizione. Il polinomio caratteristico di una matrice simmetrica si fattorizza completamente su $\mathbb{R}$.

Dimostrazione nel caso $n = 2$. La generica matrice simmetrica 2×2 e' del tipo

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix},$$

dove a, b, c sono parametri in $\mathbb{R}$; il suo polinomio caratteristico e'

$$\det(A - \lambda I_2) = \det \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ b & c - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - (a + c)\lambda + ac - b^2.$$

Questo polinomio di secondo grado ha discriminante

$$\Delta = (a + c)^2 - 4(ac - b^2) = (a - c)^2 + 4b^2;$$

per ogni $a, b, c \in \mathbb{R}$, questa espressione e' maggiore-uguale a zero e dunque il polinomio $\det(A - \lambda I_2)$ si fattorizza completamente su $\mathbb{R}$.

Proposizione. Autovettori di una matrice simmetrica associati ad autovalori distinti sono ortogonali.

Dimostrazione. Sia A una matrice simmetrica, siano λ e μ due autovalori di A con $\lambda \neq \mu$, e siano u, v due autovettori di A associati a λ, μ. Considero il prodotto $u^T Av$. Per la proprieta' associativa del prodotto di matrici e per simmetria di A si ha

$$(Au)^T v = (u^T A^T)v = (u^T A)v = u^T(Av).$$

Essendo u autovettore di A con autovalore associato λ si ha

$$(Au)^T v = (\lambda u)^T v = \lambda(u^T v) = \lambda(u \cdot v).$$

Essendo v autovettore di A con autovalore associato μ si ha

$$u^T(Av) = u^T(\mu v) = \mu(u^T v) = \mu(u \cdot v).$$

Dnque

$$\lambda(u \cdot v) = \mu(u \cdot v).$$

Essendo $\lambda \neq \mu$, cio' e' possibile solo se $u \cdot v = 0$, cioe' $u \perp v$.

Da queste proposizioni e da altri argomenti segue il

Teorema (Teorema spettrale). Sia A una matrice simmetrica $n \times n$. Allora:
- Il polinomio caratteristico di A si fattorizza completamente su $\mathbb{R}$;
- Esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ costituita da autovettori di A;
- In ciascuna base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ costituita da autovettori di A, il numero degli autovettori associati a un autovalore e' uguale alla molteplicita' dell'autovalore come radice del polinomio caratteristico;
-Prendendo per ogni autovalore μ di A una base ortonormale del corrispondente autospazio $\mathcal{V}_\mu$ ed elencando in un qualche ordine tutti i vettori cosi' ottenuti, si ottiene una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ costituita da autovettori di A; ciascuna base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ costituita da autovettori di A si ottiene in questo modo.
- Per ciascuna base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ costituita da autovettori di A, indicata con P la matrice ortogonale avente come colonne i vettori di una tale base, e indicata con D la matrice diagonale avente sulla diagonale i corrispondenti autovalori, si ha

$$A = PDP^T.$$

Esempio 1. Determiniamo una base ortonormale di $\mathbb{R}^2$ costituita da autovettori della matrice simmetrica

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

(1) Autovalori di A. Consideriamo la matrice

$$A - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} 6-\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{pmatrix}, \quad (\lambda \text{ variabile in } \mathbb{R}).$$

Il polinomio caratteristico di A e'

$$\det(A - \lambda I_2) = \lambda^2 - 9\lambda + 14.$$

Gli autovalori di A sono le radici del polinomio caratteristico:
$\lambda = 2$ e $\lambda = 7$ entrambi con molteplicita' 1.

(2) Autospazio $\mathcal{V}_2$ associato all'autovalore $\lambda = 2$. E' l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$Ax = 2x \quad \text{cioe'} \quad (A - 2I_2)x = 0 \quad \text{cioe'} \quad \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Il sistema delle due equazioni e' equivalente all'equazione

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (0), \quad \text{cioe'} \quad 2x_1 + x_2 = 0.$$

La x_2 si puo' ricavare in funzione di x_1 come $x_2 = -2x_1$, e x_1 si puo' lasciare libera; le soluzioni dell'equazione sono le coppie (x_1, x_2) del tipo

$$(x_1, -2x_1) = x_1(1, -2), \qquad x_1 \in \mathbb{R}.$$

Una base di $\mathcal{V}_2$ e' $(1, -2)$; si ha $|(1, -2)| = \sqrt{5}$, una base normale di $\mathcal{V}_2$ e'

$$\frac{1}{\sqrt{5}}(1, -2).$$

(3) Autospazio $\mathcal{V}_7$ associato all'autovalore $\lambda = 7$. E' l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$Ax = 7x \quad \text{cioe'} \quad (A - 7I_2)x = 0 \quad \text{cioe'} \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

Il sistema delle due equazioni e' equivalente all'equazione

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}, \quad \text{cioe'} \quad -x_1 + 2x_2 = 0$$

La x_1 si puo' ricavare in funzione di x_2 come $x_1 = 2x_2$, e x_2 si puo' lasciare libera; le soluzioni dell'equazione sono le coppie (x_1, x_2) del tipo

$$(2x_2, x_1) = x_2(2, 1), \qquad x_1 \in \mathbb{R}.$$

Una base di $\mathcal{V}_7$ e' $(2, 1)$; si ha $|(2, 1)| = \sqrt{5}$, una base normale di $\mathcal{V}_7$ e'

$$\frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1).$$

(4) Una base ortonormale di $\mathbb{R}^2$ di autovettori di A e'

$$\frac{1}{\sqrt{5}}(1, -2), \quad \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1).$$

(5) La matrice A dunque si puo' scrivere come

$$A = PDP^T,$$

dove

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Esempio 2. Determiniamo una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori della matrice simmetrica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

(1) Autovalori di A. Consideriamo la matrice

$$A - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 2 \\ -1 & 1-\lambda & -2 \\ 2 & -2 & 4-\lambda \end{pmatrix}, \quad (\lambda \text{ variabile in } \mathbb{R}).$$

Il polinomio caratteristico di A e'

$$\det (A - \lambda I_3) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 = -\lambda^2(\lambda - 6)$$

dunque gli autovalori di A sono:
$\lambda = 0$, con molteplicita' 2 e
$\lambda = 6$, con molteplicita' 1.

(2) Autospazio $\mathcal{V}_0$ associato all'autovalore $\lambda = 0$. E' l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$Ax = 0x \quad \text{cioe'} \quad Ax = 0 \quad \text{cioe'} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La seconda e la terza riga della matrice A sono proporzionali alla prima; in particolare, si ha $\rho(A) = 1$ e $\dim(\mathcal{V}_0) = 3 - 1 = 2$. Il sistema delle tre equazioni e' equivalente alla prima equazione

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (0), \quad \text{cioe'} \quad x_1 - x_2 + 2x_3 = 0.$$

La x_1 si puo' ricavare in funzione di x_2 e x_3 come

$$x_1 = x_2 - 2x_3,$$

e x_2, x_3 sono libere; le soluzioni dell'equazione sono le terne (x_1, x_2, x_3) del tipo

$$(x_2 - 2x_3, x_2, x_3) = x_2(1,1,0) + x_3(-2,0,1), \qquad x_2, x_3 \in \mathbb{R}.$$

Una base di $\mathcal{V}_0$ e'
$$(1,1,0),\ (-2,0,1).$$
Questa base non e' ortogonale. La componente di $(-2,0,1)$ ortogonale a $(1,1,0)$ e' data da
$$(-2,0,1) - \frac{(1,1,0)\cdot(-2,0,1)}{(1,1,0)\cdot(1,1,0)}(1,1,0) = (-1,1,1).$$
Una base ortogonale di $\mathcal{V}_0$ e'
$$(1,1,0),\ (-1,1,1).$$
Si ha $|(1,1,0)| = \sqrt{2}$ e $|(-1,1,1)| = \sqrt{3}$. Una base ortonormale di $\mathcal{V}_0$ e'
$$\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0) \quad \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1)$$
(3) Autospazio $\mathcal{V}_6$ associato all'autovalore $\lambda = 6$. E' l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo
$$Ax = 6x \quad \text{cioe'} \quad (A - 6I_3)x = 0 \quad \text{cioe'} \quad \begin{pmatrix} -5 & -1 & 2 \\ -1 & -5 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$
Si ha $\det(A - 6I_3) = 0$, come deve essere; inoltre, ogni due righe di $(A - 6I_3)$ sono linearmente indipendenti; in particolare, si ha $\rho(A - 6I_3) = 2$ e $\dim(\mathcal{V}_6) = 3 - 2 = 1$. Il sistema delle tre equazioni e' equivalente al sistema della seconda e terza equazione
$$\begin{pmatrix} -1 & -5 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{cioe'} \quad \begin{cases} x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$
Essendo
$$\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -6,$$
si possono ricavare x_1 e x_2 in funzione di x_3, e x_3 e' libera. Scritto il sistema nella forma
$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 = -2x_3 \\ x_1 - x_2 = x_3 \end{cases}$$
dalla regola di Cramer si ottiene
$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} -2x_3 & 5 \\ x_3 & -1 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{x_3}{2} \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2x_3 \\ 1 & x_3 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{-x_3}{2} \quad x_3 \in \mathbb{R}.$$
Le soluzioni del siostema sono le terne (x_1, x_2, x_3) del tipo
$$(\frac{x_3}{2}, \frac{-x_3}{2}, x_3) = x_3(\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, 1), \quad x_3 \in \mathbb{R}.$$

Una base di $\mathcal{V}_6$ e'

$$(1, -1, 2).$$

Si ha $|(1,-1,2)| = \sqrt{6}$. Una base normale di $\mathcal{V}_6$ e'

$$\frac{1}{\sqrt{6}}(1, -1, 2)$$

(4) Una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ di autovettori di A e'

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0), \quad \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, 1), \quad \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -1, 2).$$

(5) La matrice A dunque si puo' scrivere come

$$A = PDP^T,$$

dove

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$