Registro Lezione di Analisi del 6 dicembre 2016.

Di seguito si riporta il riassunto degli argomenti svolti; i riferimenti sono a parti del Cap.6 (Calcolo integrale ...), Par.2 (L'integrale come limite di somme), Par.2.1 (La definizione di integrale), Par.2.2 (Classi di funzioni integrabili), Par.3 (Proprieta' dell'integrale), Par.4 (Il teorema fondamentale del calcolo integrale) del testo.

(1) Calcolo dell'area della parte di piano compresa fra la parabola $y = x^2$, l'asse x e la retta $x = 1$, secondo Fermat (cfr Par.2.1 p. 258).

Per una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitata, suddivisione dell'intervallo $[a, b]$ in n sottointervalli uguali $[x_{j-1}, x_j]$, scelta di un punto ξ_j in ciascun sottointervallo, ed associata somma di Cauchy-Riemann

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) = \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)$$

(cfr Par.2.1 pp. 258–259).

Per una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitata, integrabilita' come proprieta' che tutte le successioni S_n ($n = 1, 2, \ldots$) di somme di Cauchy-Riemann convergano e convergano allo stesso limite; in caso affermativo, definizione di integrale di f come limite di una qualsiasi tale successione

$$\int_a^b f(x)\, \mathrm{dx} = \lim_{n\to\infty} S_n$$

(cfr Par.2.1 pp. 259–260).

Per una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabile e non negativa, definizione dell'area del trapezoide $T(f; a, b)$ di f su $[a, b]$ come integrale di f su $[a, b]$:

$$\text{area di } \ T(f; a, b) \ = \int_a^b f(x)\, \mathrm{dx}$$

(cfr Par.2.1 p. 260).

(2) Integrabilita' delle funzioni continue su un intervallo chiuso e limitato; integrabilita' delle funzioni monotone su un intervallo chiuso e limitato; integrabilita' delle funzioni definite "incollando" due funzioni integrabili definite su intervali adiacenti (cfr Par.2.1 p. 262).

Esempio di una funzioone non integrabile (cfr Par.2.1 p. 263).

(3) Proprieta' dell'integrale: linearita', additivita' rispetto all'intervallo di integrazione, monotonia (cfr Par.3 p.263–264, Th.6.4- con dimostrazione della linearita').

(4) Definizione di primitiva di una funzione f su un intervallo; descrizione della totalita' delle primitive di f a partire da una di esse (cfr Par.4 p.266–267, Def.6.2 e commenti seguenti).

Primo Teorema fondamentale del calcolo integrale. Siano f una funzione continua su $[a, b]$ e G una primitiva di f su $[a, b]$. Allora

$$\int_a^b f(x)\mathbf{dx} = G(b) - G(a).$$

(cfr. Par.4 pp.267–268, Th.6.6 -enunciato e commenti, ma non dimostrazione).