Registro Lezione di Analisi del 07 dicembre 2016.

Di seguito si riporta il riassunto degli argomenti svolti; i riferimenti sono a parti del Cap.8 (Calcolo integrale ...) Par.5 (Metodi elementari ...) del testo ed alle note alla fine di questo file.

(1) Si e' data la nozione di integrale indefinito di una funzione su un intervallo e si sono evidenziati alcuni integrali immediati (cfr. Par.5.1 Integrali immediati ... pp. 268–269 e Note finali).

(2) Si stabilita la proprieta' di linearita' dell'operazione di integrazione, e si e' mostrata una forma piu' generale degli integrali immediati (cfr. Par.5.1 Integrali immediati ... pp. 270–271 e Note finali).

(3) Si e' dato il metodo di integrazione per parti e lo si e' illustrato su alcuni esempi (cfr. Par.5.3 Integrazione per parti e Note finali).

Note.

(1) Si e' data la definizione di integrale indefinito in un modo un po' piu' formale che nel teso. Sia $f : I \to \mathbb{R}$, con I intervallo. L'insieme delle primitive di f si dice integrale indefinito di f, e si indica con $\int f(x)\mathrm{dx}$. Se $G : I \to \mathbb{R}$ e' una primitiva di f, allora sappiamo che le primitive di f sono tutte e sole le funzioni del tipo $G + c$, dove c e' una qualsiasi funzione costante; formalmente, si ha

$$\int f(x)\mathrm{dx} = \{G + c;\ c \in \mathbb{R}\},$$

ma quasi sempre si scrive in breve

$$\int f(x)\mathrm{dx} = G + c, \qquad (c \in \mathbb{R})$$

Esempio:

$$\int x\mathrm{dx} = x^2/2 + c, \qquad (c \in \mathbb{R})$$

(1) Si sono ricordate le derivate di alcune funzioni elementari:

$$\begin{aligned}
&(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} && (\alpha \in \mathbb{R};\ \text{dovute condizioni su } x)\\
&(e^x)' = e^x && (x \in \mathbb{R})\\
&(\log x)' = \frac{1}{x} && (x \in (0, +\infty))\\
&(\sin x)' = \cos x && (x \in \mathbb{R})\\
&(\cos x)' = \sin x && (x \in \mathbb{R})\\
&(\arctan x)' = \frac{1}{x^2+1} && (x \in \mathbb{R})
\end{aligned}$$

e da queste si sono dedotti alcuni integrali elementari:

$$\int x^\alpha \mathrm{dx} = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \qquad (\alpha \neq -1;\ \text{dovute condizioni su } x)$$
$$\int e^x \mathrm{dx} = e^x + c \qquad (x \in \mathbb{R})$$
$$\int \frac{1}{x} \mathrm{dx} = \log|x| + c \qquad (\text{ dovute condizioni su } x)$$
$$\int \sin x \,\mathrm{dx} = -\cos x + c \qquad (x \in \mathbb{R})$$
$$\int \cos x \,\mathrm{dx} = \sin x + c \qquad (x \in \mathbb{R})$$
$$\int \frac{1}{x^2+1} \,\mathrm{dx} = \arctan x + c \qquad (x \in \mathbb{R})$$

Le condizioni su x (oltre che da ragioni di esistenza) sono dovute alla seguente ragione: l'integrale indefinito e' stato dato per una funzione definita su un intervallo, ed e' sotto questa condizione che esso e' dato dalle funzioni somma di una primitiva fissata con una costante. Ad esempio: (1) e' dato l'integrale indefinito della funzione $1/x$ su $(0, +\infty)$ ed e' l'insieme delle funzioni date da $\log x + c$ su $(0, +\infty)$, con c costante in $\mathbb{R}$; (2) e' dato l'integrale indefinito della funzione $1/x$ su $(-\infty, 0)$ ed e' l'insieme delle funzioni date da $\log(-x) + c$ su $(-\infty, 0)$, con c costante in $\mathbb{R}$; (3) non e' dato l'integrale indefinito della funzione $1/x$ su $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

(1) Qualche esempio.

$$\int \sqrt{x}\,\mathrm{dx} = \int x^{\frac{1}{2}} \mathrm{dx} = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c, \qquad (x \in (0, +\infty)$$
$$\int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{dx} = \left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$
$$\int_1^2 \frac{1}{x} \mathrm{dx} = [\log|x|]_1^2 = \log 2 - \log 1 = \log 2$$
$$\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x} \mathrm{dx} = [\log|x|]_{-2}^{-1} = \log 1 - \log 2 = -\log 2$$
$$\int_{-1}^{2} \frac{1}{x} \mathrm{dx} \quad \text{non esiste}$$

(2) Dalla linearita' dell'operazione di derivazione

$$(\alpha F(x) + \beta G(x))' = \alpha F'(x) + \beta G'(x)$$

(per ogni F, G funzioni soddisfacenti le dovute condizioni, ed ogni α, β scalari reali) segue la linearita' dell'operazione di integrazione

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\mathrm{dx} = \alpha \int f(x)\mathrm{dx} + \beta \int g(x)\mathrm{dx},$$

(per ogni f, g funzioni soddisfacenti le dovute condizioni, ed ogni α, β scalari reali).

Esempio.

$$\begin{aligned}\int (5x+4+\frac{3}{x}+\frac{2}{\sqrt{x}})\mathrm{dx} &= 5\int x\,\mathrm{dx}+4\int 1\,\mathrm{dx}+3\int \frac{1}{x}\,\mathrm{dx}+2\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{dx}\\ &= \frac{5}{2}x^2+4x+3\log|x|+4\sqrt{x}+c\end{aligned}$$

In generale: l'integrale indefinito di un polinomio di grado $n > 0$ e' un polinomio di gradfo $n+1$, e l'integrale indefinito di una combinazione lineare di potenze ad esponente reale e' una combinazione lineare di potenze ad esponente reale ed eventualmente un logaritmo.

(2) Dalla regola di derivazione delle funzioni composte

$$(f(g(x))' = f'(g(x))g'(x)$$

segue che

$$\int f'(g(x))g'(x)\mathrm{dx} = f(g(x)+c, \quad (c \in \mathbb{R})$$

(per ogni f, g funzioni soddisfacenti le dovute condizioni). In particolare, ogni integrale immediato possiede una variazione per sostituzione, ad esempio:

$$\begin{aligned}\int \varphi(x)^\alpha \varphi'(x)\mathrm{dx} &= \frac{\varphi(x)^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c\\ \int e^{\varphi(x)}\varphi'(x)\mathrm{dx} &= e^{\varphi(x)}+c\\ \int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\mathrm{dx} &= \log|\varphi(x)|+c\end{aligned}$$

Per ora, alcuni semplici esempi (altri verranno dati in seguito dopo avere introdotto il metodo di sostituzione).

$$\begin{aligned}\int [3x+2]^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{dx} &= \frac{1}{3}\int [3x+2]^{\frac{1}{2}}\ 3\ \mathrm{dx} = \frac{2}{9}[3x+2]^{\frac{3}{2}}+c\\ \int e^{5x+4}\ \mathrm{dx} &= \frac{1}{5}\int e^{5x+4}\ 5\ \mathrm{dx} = \frac{1}{5}e^{5x+4}+c\\ \int \frac{1}{7x+6}\mathrm{dx} &= \frac{1}{7}\int \frac{7}{7x+6}\ \mathrm{dx} = \frac{1}{7}\log|7x+6|+c\end{aligned}$$

Si trova anche l'integrale della funzione tangente:

$$\int \tan x\ \mathrm{dx} = \int \frac{\sin x}{\cos x}\ \mathrm{dx} = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\ \mathrm{dx} = -\log|\cos x|+c.$$

(3) Dalla regola di derivazione del prodotto

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

per definizione di integrale indefinito e per la linearita' dell'operazione di integrazione segue la relazione

$$\int f'(x)g(x)\ \mathrm{dx} + \int f(x)g'(x)\ \mathrm{dx} = f(x)g(x) + c$$

da cui si ottiene la

$$\int f'(x)g(x)\ \mathrm{dx} = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\ \mathrm{dx}.$$

Dunnque l'integrazione del prodotto della derivata di una prima funzione per una seconda funzione puo' essere ricondotta all'integrazione del prodotto della prima funzione per la derivata della seconda funzione. A volte una delle due integrazioni e' significativamente piu' semplice dell'altra.

Esempio.

$$\begin{aligned}\int (x+1)^\pi x\ \mathrm{dx} = \int \left(\frac{(x+1)^{\pi+1}}{\pi+1}\right)' x\ \mathrm{dx} &= \frac{(x+1)^{\pi+1}}{\pi+1}x - \int \frac{(x+1)^{\pi+1}}{\pi+1}(x)'\ \mathrm{dx} \\ &= \frac{(x+1)^{\pi+1}}{\pi+1}x - \int \frac{(x+1)^{\pi+1}}{\pi+1}\ \mathrm{dx} \\ &= \frac{(x+1)^{\pi+1}}{\pi+1}x - \frac{(x+1)^{\pi+2}}{(\pi+1)(\pi+2)}\end{aligned}$$

Esempio.

$$\begin{aligned}\int xe^x\ \mathrm{dx} = \int x\,(e^x)'\ \mathrm{dx} &= xe^x - \int (x)'e^x\ \mathrm{dx} \\ &= xe^x - \int e^x\ \mathrm{dx} \\ &= xe^x - e^x\end{aligned}$$

Esempio.

$$\begin{aligned}\int x^2e^x\ \mathrm{dx} = \int x^2\,(e^x)'\ \mathrm{dx} &= x^2e^x - \int (x^2)'e^x\ \mathrm{dx} \\ &= x^2e^x - \int 2xe^x\ \mathrm{dx} \\ &= x^2e^x - 2(xe^x - e^x)\end{aligned}$$

(nell'ultimo passaggio si e' utilizzato il risultato dell'esempuio precedente).

Iterando il processo descritto nei due esempi precedenti si arriva a dare una formula per ogni integrale

$$\int x^n e^x\ \mathrm{dx}, \qquad (n \in \mathbb{N})$$

piu' in generale, per ogni integrale

$$\int P(x)e^x \, \mathrm{dx}, \qquad (P(x) \text{ polinomio in } x).$$

Esempio.

$$\begin{aligned}
\int x \log x \mathrm{dx} = \int (\frac{x^2}{2})' \log x \, \mathrm{dx} &= \frac{x^2}{2} \log x - \int \frac{x^2}{2} (\log x)') \, \mathrm{dx} \\
&= \frac{x^2}{2} \log x - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} \, \mathrm{dx} \\
&= \frac{x^2}{2} \log x - \int \frac{x}{2} \, \mathrm{dx} \\
&= \frac{x^2}{2} \log x - \frac{x^2}{4}
\end{aligned}$$

Esempio. Integrale del logaritmo:

$$\begin{aligned}
\int \log x \mathrm{dx} = \int (x)' \log x \, \mathrm{dx} &= x \log x - \int x(\log x)') \, \mathrm{dx} \\
&= x \log x - \int 1 \, \mathrm{dx} \\
&= x \log x - x
\end{aligned}$$

Esempio. Per ogni numero reale $a \neq -1$ si ha

$$\begin{aligned}
\int x^a \log x \mathrm{dx} = \int (\frac{x^{a+1}}{a+1})' \log x \, \mathrm{dx} &= \frac{x^{a+1}}{a+1} \log x - \int \frac{x^{a+1}}{a+1} (\log x)') \, \mathrm{dx} \\
&= \cdots \\
&= \frac{x^{a+1}}{a+1} \log x - \frac{x^{a+1}}{(a+1)^2}.
\end{aligned}$$