Registro Lezione di Analisi del 12 dicembre 2016.

Di seguito si riporta il riassunto degli argomenti svolti; i riferimenti sono a parti del Cap.6 (Calcolo integrale ...), Par.8 (Integrali generalizzati), Par.8.1 (Integrazione di funzioni non limitate), Par.8.2 (Criteri di integrabilita' al finito), Par.8.3 (Integrazione su intervalli illimitati), Par.8.4 (Criteri di integrabilita' all'infinito), Par.5 (Metodi elementari ...), Par.5.2 (Integrazione delle funzioni razionali) del testo ed alle note alla fine di questo file.

(1) Per una funzione $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ integrabile su ogni intervallo $[a, b]$, si e' data la nozione di integrabilita' (in senso generalizzato) come l'esistenza e la finitezza del limite per $b \to +\infty$ degli integrali $\int_a^b f(x)\, \mathrm{dx}$, e in caso affermativo si e' definito l'integrale (generalizzato) $\int_a^{+\infty} f(x)\, \mathrm{dx}$ uguale a tale limite

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, \mathrm{dx} = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\, \mathrm{dx}$$

(cfr. Par.8.3 p.300).

Si sono mostrati esempi di una funzione integrabile e di una funzione non integrabile su $[1, +\infty)$ (cfr. Note finali). Si e' provato che una funzione potenza $x \mapsto 1/x^\alpha$ e' integrabile sull'intervallo $[1, +\infty)$ se e solo se $\alpha > 1$, e in tal caso

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\, \mathrm{dx} = \frac{1}{\alpha - 1}$$

(cfr. Par.8.3 p.301, Esempio 8.4)

Per una funzione $f : (-\infty, b] \to \mathbb{R}$ integrabile su ogni intervallo $[a, b]$, si e' data la nozione di integrabilita' (in senso generalizzato) come l'esistenza e la finitezza del limite per $a \to -\infty$ degli integrali $\int_a^b f(x)\, \mathrm{dx}$, e in caso affermativo si e' definito l'integrale (generalizzato) $\int_{-\infty}^b f(x)\, \mathrm{dx}$ uguale a tale limite

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\, \mathrm{dx} = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\, \mathrm{dx}$$

(cfr. Par.8.3 p.301).

Si e' mostrato un esempio di una funzione integrabile su $(-\infty, 0]$ (cfr. Note finali).

Si e' enunciato e provato che per una funzione non negativa $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ soddisfacente le dovute condizioni, il limite per $b \to +\infty$ degli integrali $\int_a^b f(x)\, \mathrm{dx}$ esiste sempre, finito o infinito; inoltre, per due tali funzioni $g, f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ con $g \geq f \geq 0$, l'integrabilita' di g implica l'integrabilita' di f e (equivalentemente) la non integrabilita' di f implica la non integrabilita' di g. Un'analoga proposizione vale per funzioni non negative $g, f : (-\infty, b] \to \mathbb{R}$ (cfr. Par.8.4 Confronto p.303 e Note finali).

Si e' detto che una funzione f integrabile su ogni intervallo chiuso e limitato, e' integrabile (in senso generalizzato) su $\mathbb{R}$ se per qualsiasi $c \in \mathbb{R}$ f e' integrabile sia su $(-\infty, c]$ che su $[c, +\infty)$, ed in tal caso si e' definito il suo integrale (generalizzato) su $\mathbb{R}$ ponendo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{dx} = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,\mathrm{dx} + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{dx}$$

(cfr. Par.8.3 p.301)

Si e' mostrato un esempio di una funzione integrabile su $\mathbb{R}$.

Si e' definita l'area del trapezoide di una funzione f non negativa integrabile (in senso generalizzato) su un intervallo illimitato come l'integrale (generalizzato) di f su tale intervallo (cfr. Note finali).

(4) Per una funzione $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ integrabile su ogni intervallo $[a, \beta]$ con $\beta < b$ si e' data la nozione di integrabilita' (in senso generalizzato) come l'esistenza e la finitezza del limite per $\beta \to b^-$ degli integrali $\int_a^\beta f(x)\,\mathrm{dx}$, e in caso affermativo si e' definito l'integrale (generalizzato) $\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}$ uguale a tale limite (cfr. Par.8.1 p.296).
Per una funzione $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ integrabile su ogni intervallo $[\alpha, b]$ con $a < \alpha$ si e' data la nozione di integrabilita' (in senso generalizzato) come l'esistenza e la finitezza del limite per $\alpha \to a^+$ degli integrali $\int_\alpha^b f(x)\,\mathrm{dx}$, e in caso affermativo si e' definito l'integrale (generalizzato) $\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}$ uguale a tale limite (cfr. Par.8.1 p.297).
Si e' mostrato un esempio di una funzione integrabile su $(0, 1]$ (cfr. Note finali).
Vale anche in questo caso una proposizione sulle funzioni non negative (cfr. Par. 8.2 Confronto p.298).
Si definisce l'area del trapezoide di una funzione f non negativa integrabile (in senso generalizzato) su un intervallo semiaperto limitato come l'integrale (generalizzato) di f su tale intervallo.

(3) Si e' mostrato il primo passo del metodo per l'integrazione delle funzioni razionali, applicandolo al caso delle funzioni razionali con denominatore di grado 1 (cfr. Par.5.2 p.273).

Note.

(1) Consideriamo la funzione $[1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x^2}$; e' continua sul suo dominio di definizione, in particolare e' integrabile su ogni intervallo $[1, b]$; si ha

$$\int_1^b \frac{1}{x^2}\,\mathrm{dx} = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^b = -\frac{1}{b} + 1 \to 1 \quad \text{per } b \to +\infty;$$

dunque la funzione e' integrabile su $[1, +\infty)$ e

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{dx} = 1.$$

Consideriamo la funzione $[1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$; e' continua sul suo dominio di definizione, in particolare e' integrabile su ogni intervallo $[1, b]$; si ha

$$\int_1^b \frac{1}{x}\,\mathrm{dx} = [\log x]_1^b = \log b \to +\infty \quad \text{per } b \to +\infty;$$

dunque la funzione non e' integrabile su $[1, +\infty)$.

(1) Consideriamo la funzione $(-\infty, 0] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{cx}$ dove $c > 0$ e' una costante positiva; e' continua sul suo dominio di definizione, in particolare e' integrabile su ogni intervallo $[a, 0]$; si ha

$$\int_a^0 e^{cx}\, \mathrm{dx} = \left[\frac{e^{cx}}{c}\right]_a^0 = \frac{1}{c}(1 - e^{ca}) \to \frac{1}{c} \quad \text{per } a \to -\infty;$$

dunque la funzione e' integrabile su $(-\infty, 0]$ e

$$\int_{-\infty}^0 e^{cx}\, \mathrm{dx} = \frac{1}{c}.$$

(1) Proposizione. Per una funzione non negativa $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ soddisfacente le dovute condizioni, il limite per $b \to +\infty$ degli integrali $\int_a^b f(x)\, \mathrm{dx}$ esiste sempre, finito o infinito; inoltre, per due tali funzioni $g, f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ con $g \geq f \geq 0$, l'integrabilita' di g implica l'integrabilita' di f e (equivalentemente) la non integrabilita' di f implica la non integrabilita' di g.

Dimostrazione parziale. La funzione

$$F : [a, +\infty) \to \mathbb{R}, \quad F : b \mapsto \int_a^b f(x)\, \mathrm{dx}$$

e' monotona crescente; infatti per ogni $b_2 \geq b_1 \geq a$, essendo f non negativa si ha $\int_{b_1}^{b_2} f(x)\, \mathrm{dx} \geq 0$ e dunque

$$\int_a^{b_2} f(x)\, \mathrm{dx} = \int_a^{b_1} f(x)\, \mathrm{dx} + \int_{b_1}^{b_2} f(x)\, \mathrm{dx} \geq \int_a^{b_1} f(x)\, \mathrm{dx}.$$

Essendo la funzione $F(b)$ monotona crescente su $[a, +\infty)$, se $F(b)$ e' limitata su $[a, +\infty)$ allora

$$\lim_{b \to +\infty} F(b) = \sup_{b \in [a, +\infty)} F(b) < +\infty,$$

e se $F(b)$ e' illimitata su $[a, +\infty)$ allora

$$\lim_{b \to +\infty} F(b) = +\infty.$$

(1) Esempio. Su $[1, +\infty)$, la funzione $x \mapsto 1/x^2$, e la funzione $x \mapsto 1/(x^2 + 2x + 3)$ sono non negative inoltre su tale intervallo $1/x^2 \geq 1/(x^2 + 2x + 3) \geq 0$. Essendo $x \mapsto 1/x^2$ integrabile su $[1, +\infty)$, anche $x \mapsto 1/(x^2 + 2x + 3)$ e' integrabile su $[1, +\infty)$.

(1) Consideriamo la funzione $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$; e' continua su $\mathbb{R}$, in particolare e' integrabile su ogni intervallo chiuso e limitato; si ha

$$\int_0^b \frac{1}{x^2 + 1}\, \mathrm{dx} = [\arctan x]_0^b = \arctan b \to \frac{\pi}{2} \quad \text{per } b \to +\infty;$$

analogamente si mostra che

$$\int_a^0 \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{dx} \to \frac{\pi}{2} \quad \text{per } a \to -\infty;$$

dunque la funzione e' integrabile su $[0, +\infty)$, su $(-\infty, 0]$, su $\mathbb{R}$ e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{dx} = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{dx} + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{dx} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

(2) Consideriamo la funzione $(0, 1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$; e' integrabile su ogni intervallo $[\alpha, 1]$ con $\alpha > 0$, e si ha

$$\int_\alpha^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{dx} = \left[2\sqrt{x}\right]_\alpha^1 = 2(1 - \sqrt{\alpha}) \to 2 \quad \text{per } \alpha \to 0^+;$$

dunque la funzione e' integrabile su $(0, 1]$ e

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{dx} = 2.$$