Registro Lezione di Analisi del 14 dicembre 2016.

Di seguito si riporta il riassunto degli argomenti svolti; i riferimenti sono a parti del Cap.6 (Calcolo integrale ...) Par.5 (Metodi elementari ...) Par.9 (Funzioni integrali) del testo ed alle note alla fine di questo file.

(1) Si e′ data la nozione di funzione integrale di una funzione rispetto ad un punto base (cfr. Par.9 Funzioni integrali pp.305–306 e Note finali).

(2) Si e′ enunciata e dimostrata la prima parte del secondo teorema fondamentale del calcolo integrale (cfr. Par.9 Funzioni integrali, Th.6.10 punto 1, p.307 e Note finali).

(2) Si e′ enunciata la seconda parte del secondo teorema fondamentale del calcolo integrale (cfr. Par.9 Funzioni integrali, Th.6.10 punto 2, p.307, e Esempi pp.308-309 e Note finali).

(2) Si e′ presentato il metodo di sostituzione (cfr. Par.5 Metodi elementari ... pp.270-271 e Note finali).

Note.

(0) Ogniqualvolta e′ definito un integrale $\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}$ con $a < b$, si definisce pure

$$\int_b^a f(x)\,\mathrm{dx} = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx};$$

inoltre, per ogni funzione definita almeno su un punto c si pone

$$\int_c^c f(x)\,\mathrm{dx} = 0.$$

Con queste convenzioni, l'integrale risulta definito come un numero reale eventualmente associato a una funzione e ad un segmento orientato sulla retta reale, o che e′ lo stesso ad una coppia ordinata di numeri reali. Tutte le proposizioni enunciate in precedenza continuano a valere, alcune in senso stretto, altre con le dovute variazioni, ed alcune vengono rafforzate. Alcuni esempi:

Sia f una funzione integrabile su un intervallo. Allora: per ogni tre punti a, b, c dell'intervallo (in qualsiasi ordine siano) si ha

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = \int_a^c f(x)\,\mathrm{dx} + \int_c^b f(x)\,\mathrm{dx}.$$

Se f e g sono due funzioni integrabili su uno stesso intervallo, e $f \leq g$, allora per ogni due punti a, b nell'intervallo si ha

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{dx} \quad \text{se } a \leq b;$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} \geq \int_a^b g(x)\,\mathrm{dx} \quad \text{se } a \geq b.$$

Versione segnata del I teorema fondamentale. Se F e' una primitiva di una funzione f integrabile su un intervallo, allora per ogni due punti a, b dell'intervallo (in qualsiasi ordine siano) si ha

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = [F(x)]_a^b.$$

(1) Definizione. Sia $f : I \to \mathbb{R}$, con I intervallo ed f integrabile (eventualmente in senso generalizzato) su ogni intervallo chiuso e limitato $J \subseteq I$, e sia $x_0 \in I$. La funzione $F_{x_0} : I \to \mathbb{R}$ data da

$$F_{x_0}(x) = \int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{dt}, \quad x \in I$$

si dice funzione integrale di f con punto base x_0.

Osservazione. Una funzione f ha tante funzioni integrale, a seconda dei possibili punti base, ma la variazione di ciascuna funzione integrale di f fra due punti fissati e' sempre la stessa, non dipende dal punto base. Specificamente, per ogni $x_1, x_2 \in I$, si ha

$$\begin{aligned}[F_{x_0}(x)]_{x_1}^{x_2} &= \int_{x_0}^{x_2} f(t)\,\mathrm{dt} - \int_{x_0}^{x_1} f(t)\,\mathrm{dt} \\ &= \int_{x_0}^{x_2} f(t)\,\mathrm{dt} + \int_{x_1}^{x_0} f(t)\,\mathrm{dt} = \int_{x_1}^{x_2} f(t)\,\mathrm{dt}.\end{aligned}$$

(2) Esempio 1. Sia

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < 0 \\ 1 & \text{per } x \geq 0 \end{cases}.$$

f e' una funzione continua su tutto $\mathbb{R}$, tranne che in $x = 0$. La funzione integrale $F_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con punto base $x_0 = 0$ e' data da

$$F_0(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{dt} = \begin{cases} (\text{ per } x < 0) & = \int_0^x 0\,\mathrm{dt} = 0 \\ (\text{ per } x \geq 0) & = \int_0^x 1\,\mathrm{dt} = x \end{cases}$$

in breve

$$F_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < 0 \\ x & \text{per } x \geq 0 \end{cases}.$$

Si osserva che F_0 e' una funzione continua su tutto $\mathbb{R}$, anche nel punto $x = 0$ in cui f e' discontinua.

(2) Teorema. Sia $F : I \to \mathbb{R}$ una funzione integrale di una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ (soddisfacente le dovute condizioni). Allora F e' continua su I.

Dimostrazione nel caso in cui f sia integrabile in senso stretto su ogni intervallo chiuso e limitato $J \subseteq I$. Bisogna provare che per ogni $\bar{x} \in I$,

$$\left(F(x) - F(\bar{x}) = \int_{\bar{x}}^{x} f(t)\, \mathrm{dt} \right) \to 0 \quad \text{per } x \to \bar{x}.$$

Sia $[a, b]$ un intervallo (non ridotto ad un punto) tale che $\bar{x} \in [a, b] \subseteq I$; essendo f integrabile in senso stretto su $[a, b]$, essa e' limitata su $[a, b]$, cioe' esistono $m, M \in \mathbb{R}$ tali che

$$m \le f(x) \le M, \quad \forall x \in [a, b].$$

Per ogni $x \in [a, b]$ si ha

$$\begin{aligned} m(x - \bar{x}) \le \int_{x_0}^{x} f(t)\, \mathrm{dt} \le M(x - \bar{x}), \qquad & \text{per } x > \bar{x} \\ M(x - \bar{x}) \le \int_{x_0}^{x} f(t)\, \mathrm{dt} \le m(x - \bar{x}), \qquad & \text{per } x < \bar{x}; \end{aligned}$$

per $x \to \bar{x}$ si ha $m(x - \bar{x}) \to 0$ e $M(x - \bar{x}) \to 0$, dunque per il criterio del confronto anche

$$\int_{\bar{x}}^{x} f(t)\, \mathrm{dt} \to 0.$$

(3) Esempio 2. Sia

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } x < 0 \\ x + 1 & \text{per } x \ge 0 \end{cases}$$

f e' una funzione derivabile su tutto $\mathbb{R}$ tranne che in $x = 0$.

La funzione integrale $F_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con punto base $x_0 = 0$ e' data da

$$F_0(x) = \int_0^x f(t)\, \mathrm{dt} = \begin{cases} (\text{ per } x < 0) & = \int_0^x 1\, \mathrm{dt} = x \\ (\text{ per } x \ge 0) & = \int_0^x (t + 1)\, \mathrm{dt} = [\frac{t^2}{2} + t]_0^x = \frac{x^2}{2} + x \end{cases}$$

in breve

$$F_0(x) = \begin{cases} x & \text{per } x < 0 \\ \frac{x^2}{2} + x & \text{per } x \ge 0 \end{cases}$$

Si osserva che F_0 e' una funzione derivabile su tutto $\mathbb{R}$, anche nel punto $x = 0$ in cui f non e' derivabile, inoltre $F_0'(0) = 1$ (lo si verifichi calcolando separatamente derivate sinistra $(F_0)'_-(0)$ e destra $(F_0)'_+(0)$) e $1 = f(0)$.

Si lascia al lettore di comparare i grafici di f e di F_0.

(3) Teorema (secondo teorema fondamentale del calcolo integrale). Sia $F : I \to \mathbb{R}$ una funzione integrale di una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ (soddisfacente le dovute condizioni). Se f e' continua in un punto $\bar{x} \in I$, allora F e' derivabile in $\bar{x}$, inoltre

$$F'(\bar{x}) = f(\bar{x});$$

Se f e' continua su I, allora F e' derivabile su I e

$$F' = f.$$

(3) Enunciato comparato dei due teoremi fondamentali:
primo teorema fondamentale:

$$\int_a^b \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}F(x)\right)\mathrm{dx} = [F(x)]_a^b$$

per ogni funzione $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ derivabile tale che F' sia integrabile su $[a,b]$;
secondo teorema fondamentale:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\left(\int_{x_0}^x f(t)\mathrm{dt}\right) = f(x), \qquad \forall x \in I$$

per ogni funzione f continua su un intervallo I ed $x_0 \in I$.

(3) Teorema (secondo teorema fondamentale con ipotesi piu' deboli). Sia $F : I \to \mathbb{R}$ una funzione integrale di una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ (soddisfacente le dovute condizioni). Se esiste il limite sinistro di f per $x \to \bar{x}$ allora esiste la derivata sinistra di F in $\bar{x}$ ed e'

$$F'_-(\bar{x}) = \lim_{x\to\bar{x}^-} f(x).$$

Analogamente per limite destro e derivata destra.

(3) I teoremi precedenti permettono di effettuare uno studio qualitativo di una funzione integrale a partire da informazioni qualitative sulla funzione integranda.

Esempio. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione con le seguenti caratteristiche:
(a) f e' derivabile su tutto $\mathbb{R}$, tranne che in $x = 0$ dove non e' nemmeno continua;
(b) $f(x) \to -1$ per $x \to 0^-$ e $f(x) \to 2$ per $x \to 0^+$;
(c) f e' strettamente descrescente su $(-\infty, 0)$ e strettamente crescente su $(0, +\infty)$;
(d) $f(-1) = 0$;
(e) f e' positiva, nulla, negativa, positiva rispettivamente su $(-\infty,-1)$, $[-1]$, $(-1,0)$, $(0,+\infty)$. (segue dai due punti precedenti) .
Si lascia al lettore di dare una rappresentazione del grafico di una possibile tale funzione f.
La funzione f e' integrabile in senso stretto su ogni intervallo chiuso e limitato; sia $F = F_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione integrale di f con punto base $x = 0$. Allora:
(•) $F(0) = \int_0^0 f(t)\,\mathrm{dt} = 0$;
(•) essendo F una funzione integrale, F e' continua sul suo dominio $\mathbb{R}$;
(•) essendo $f(x)$ continua in ogni $x \neq 0$, $F(x)$ e' derivabile e $F'(x) = f(x)$ in ogni $x \neq 0$; per la (b), esistono $F'_-(0) = -1$ e $F'_+(0) = 2$;

($\bullet$) da $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \neq 0$ e dalla (e) segue che F e' strettamente crescente su $(-\infty, -1)$ ha un massimo locale in -1, e' strettamente decrescente su $(-1, 0)$, e' strettamente crescente su $(0, +\infty)$;

($\bullet$) essendo $f(x)$ derivabile in ogni $x \neq 0$, $F(x)$ e' derivabile due volte e $F''(x) = f'(x)$ in ogni $x \neq 0$;

($\bullet$) da $F''(x) = f'(x)$ per ogni $x \neq 0$ e dalla (c) segue che F e' concava verso il basso su $(-\infty, 0)$ ed e' concava verso l'alto su $(0, +\infty)$.

Si lascia al lettore di dare una rappresentazione del grafico della funzione F coerente con la rappresentazione data del grafico della funzione f.

(4) Metodo di sostituzione (caso generale). Siano $f : J \to \mathbb{R}$ e $\varphi : I \to \mathbb{R}$ due funzioni per le quali e' definita la funzione composta $f \circ \varphi$, con f continua su J e φ derivabile con φ' continua su I. Allora le primitive della funzione $f(\varphi(x))\varphi'(x)$, nella variabile $x \in I$ sono esattamente le funzioni ottenute da primitive della funzione $f(u)$ nella variabile $u \in J$ mediante sostituzione $u = \varphi(x)$ con $x \in I$; in altri termini:

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{dx} = \int f(u)\,\mathrm{du}, \qquad (\text{con } u = \varphi(x)).$$

Formalmente, si passa da un integrale all'altro ponendo

$$u = \varphi(x); \quad \mathrm{du} = \varphi'(x)\mathrm{dx}.$$

Applicazione 1. Consideriamo

$$\int \left[x^2 + 2x + 3\right]^{1/2} (x+1)\,\mathrm{dx}.$$

Poniamo

$$u = x^2 + 2x + 3; \quad \mathrm{du} = (x^2 + 2x + 3)'\,\mathrm{dx} = (2x + 2)\,\mathrm{dx}.$$

Si ha

$$\begin{aligned} \int \left[x^2 + 2x + 3\right]^{1/2} (x+1)\,\mathrm{dx} &= \int u^{1/2} \frac{\mathrm{du}}{2} & \qquad (u = x^2 + 2x + 3) \\ &= \frac{1}{3} u^{3/2} & \ldots \\ &= \frac{1}{3} \left[x^2 + 2x + 3\right]^{3/2}. \end{aligned}$$

Applicazione 2. Consideriamo

$$\int e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{dx}.$$

Poniamo

$$x = t^2 \quad \mathrm{dx} = (t^2)'\,\mathrm{dt} = 2t\,\mathrm{dt}.$$

Si ha

$$\begin{aligned}\int e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{dx} &= \int e^t 2t\,\mathrm{dt}, && (x = t^2)\\ &= 2(te^t - e^t) && \dots\\ &= 2\left(\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - e^{\sqrt{x}}\right).\end{aligned}$$