Alcuni esercizi di algebra lineare:

1. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ sono dati i vettori $\mathbf{u} = (1, 0, -1, 2)$ e $\mathbf{v} = (0, 1, -2, 3)$. Si stabilisca se il vettore $(1, 1, 1, 1)$ si puo' ottenere come combinazione lineare di $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$. Analogamente per il vettore $(3, -2, 1, 0)$

2. Si dimostri che per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ ed ogni $t \in \mathbb{R}$ si ha
$$t(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = (t\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot (t\mathbf{v}).$$

3. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ sono dati i vettori $\mathbf{a} = (1, 7, 9, 3)$ e $\mathbf{u} = (1, 1, 1, 1)$. Si determinino i vettori $\mathbf{a}_{\|}$ e $\mathbf{a}_{\perp}$ componenti di $\mathbf{a}$ parallela ed ortogonale al vettore $\mathbf{u}$; si verifichi i vettori trovati soddisfano, come dovrebbero, le relazione $\mathbf{a}_{\|} \perp \mathbf{a}_{\perp}$ e l'identita' $|\mathbf{a}|^2 = |\mathbf{a}_{\|}|^2 + |\mathbf{a}_{\perp}|^2$.

4. Siano $\mathbf{e}_i$ un vettore fondamentale e $\mathbf{v}$ un vettore qualsiasi dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$. Cos'e' la componente vettoriale di $\mathbf{v}$ parallela a $\mathbf{e}_i$? E quella ortogonale a $\mathbf{e}_i$?

5. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ sono dati i vettori $\mathbf{a} = (2, 1, 0, -1)$ e $\mathbf{b} = (3, 0, 1, -2)$.

   - Si verifichi che $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ soddisfano la disuguaglianza triangolare.

   - Si verifichi che $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ soddisfano la disuguaglianza Cauchy-Schwarz.

6. Si dimostri la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz in $\mathbb{R}^n$ nel caso i cui uno dei due vettori sia un vettore fondamentale.