Registro Lezioni di Analisi del 3, 4, 5 ottobre 2016.

Si e' descritta l'dentificazione di $\mathbb{R}$ con la retta euclidea, e si sono date le nozioni e notazioni su intervalli e valore assoluto. Si sono presentate le operazioni, rese possibili dall'ampliamento al campo dei reali (radici, potenze ad esponente reale, logaritmi); si e' iniziato lo studio delle funzioni reali di variabile reale, introducendo tra l'altro le nozioni di monotonia e periodicita', considerando le funzioni elementari (polinomi di I grado, potenze con esponente intero relativo, radici, potenze con esponente reale, esponenziali, logaritmiche, trigonometriche) descrivendo qualitativamente i loro grafici, l'eventuale monotonia e periodicita'; si sono date le nozioni di funzione invertibile e di funzione inversa, evidenziando l'implicazione da stretta monotonia a invertibilita', e la relazione fra i grafici di funzioni fra loro inverse; si e' data la nozione di composizione di funzioni, se ne sono osservate le proprieta' (in particolare la non commutativita'); si e' accennato all'uso delle funzioni invertibili e delle funzioni strettamente monotone per risolvere equazioni e disequazioni.

Riferimenti dal testo:

Cap. 1 Numeri.

5 Radicali. Potenze, logaritmi. 5.1 Radici $n-$me aritmetiche. 5.2 Potenze a esponente reale. 5.3 Logaritmi. 5.4 Approssimazioni.

Cap. 2 Funzioni di una variabile.

1 Il concetto di funzione.

2 Funzioni reali di variabile reale. 2.1 Generalita'. 2.2 Funzioni limitate. 2.4 Funzioni monotone. 2.5 Funzioni periodiche.

3 Funzioni elementari. 3.1 Funzioni potenza. 3.2 Funzioni esponenziali e logaritmiche. 3.3 Funzioni trigonometriche.

4 Funzioni composte e inverse. 4.1 Funzioni composte. 4.2 Funzioni invertibili; funzioni inverse. 4.3 Le funzioni trigonometriche inverse.

Di seguito sono riportate alcune nozioni ed alcuni risultati che sono stati dati in modo un poco diverso dal testo, oppure che non sono presenti nel testo.

* Concetto generale di grafico. Il grafico di una funzione $f : A \to B$ da un qualsiasi insieme A ad un qualsiasi insieme B e'

$$\text{(grafico di f)} = \{(x, y) \in A \times B |\ y = f(x)\}.$$

* Ciascuna funzione polinomiale di grado (al piu') uno

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = mx + q \quad (m, q \text{ costanti in } \mathbb{R})$$

ha come grafico l'insieme dei punti (x, y) che sono soluzioni dell'equaziione

$$y = mx + q$$

cioe' la retta che passa per il punto $P(0, q)$ ed e' parallela al vettore $(1, m)$. La funzione e' crescente, costante, decrescente secondo che il coefficiente m sia maggiore, uguale, minore di zero.

* **Th.** *Sia n un qualsiasi intero positivo pari; nel campo reale $\mathbb{R}$, l'equazione $x^n = c$*
- per $c < 0$ non ha soluzioni;
- per $c \geq 0$ ha due soluzioni una opposta dell'altra (coincidenti per $c = 0$); la soluzione maggiore-uguale a zero si dice "radice aritmetica $n-$ma di c" e si indica con $\sqrt[n]{c}$.

Dunque per n pari $\sqrt[n]{c}$ e' definito solo per $c \geq 0$ ed e' caratterizzato da

$$(\sqrt[n]{c})^n = c, \qquad \sqrt[n]{c} \geq 0;$$

inoltre $\sqrt[n]{c^n} = |c|$, per ogni $c \in \mathbb{R}$.

Th. *Sia n un intero positivo dispari. Nel campo reale $\mathbb{R}$, l'equazione $x^n = c$ per ogni c ha esattamente una soluzione, dello stesso segno di c, che si dice "radice $n-$ma aritmetica di c" e si indica con $\sqrt[n]{c}$*

Dunque per n dispari $\sqrt[n]{c}$ e' sempre definita ed e' caratterizzata da

$$(\sqrt[n]{c})^n = c;$$

inoltre $\sqrt[n]{c^n} = c$ per ogni $c \in \mathbb{R}$.

* **Th.** *Sia $a \in \mathbb{R}$ con $0 < a \neq 1$. Nel campo reale, l'equazione $a^x = c$*
- per $c \leq 0$ non ha alcuna soluzione;
- per $c > 0$ ha esattamente una soluzione che si dice "logaritmo in base a di c" e si indica con $\log_a c$.

Dunque $\log_a c$ e' definito solo per $0 < a \neq 1$ e $c > 0$ ed e' caratterizzato dalla uguaglianza

$$a^{\log_a c} = c.$$

Osservazione: $\log_a (a^d) = d$ per ogni $d \in \mathbb{R}$.

* Funzione inversa. Sia data una funzione $f : D \to \mathbb{R}$. Per ogni $c \in \mathbb{R}$ consideriamo l'equazione $f(x) = c$ nell'incognita $x \in D$; se ciascuna di queste equazioni ha al piu' una soluzione allora si dice che la funzione f e' "invertibile"; in questo caso, per ogni $c \in f(D)$ l'equazione $f(x) = c$ ha una ed una sola soluzione che si indica con $f^{-1}(c)$; la legge $c \mapsto f^{-1}(c)$ definsce cosi' una funzione $f^{-1} : f(D) \to \mathbb{R}$, che si dice "funzione inversa" di f.

Osservazione: la condizione di invertibilita' per la funzione $f : D \to \mathbb{R}$,

(1) $\forall c \in \mathbb{R}, \quad \exists$ al piu' un $x \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) = c$;

e' equivalente a ciascuna delle due condizioni

(2) $\forall x_1, x_2 \in D, \quad$ se $x_1 \neq x_2$ allora $f(x_1) \neq f(x_2)$;

(2') $\forall x_1, x_2 \in D, \quad$ se $f(x_1) = f(x_2)$ allora $x_1 = x_2$.

* **Fatto.** *Il grafico di una funzione invertibile $f : D \to \mathbb{R}$ ed il grafico della sua funzione inversa $f^{-1} : f(D) \to \mathbb{R}$ sono simmterici rispetto alla retta $y = x$.*

Infatti: $(a, b) \in$ (grafico di f) significa che $a \in D$ e $b = f(a)$, cio' equivale a $b \in f(D)$ e $a = f^{-1}(b)$, e cio' significa che $(b, a) \in$ (grafico di f^{-1}).