Registro Lezione di Algebra lineare del 5 ottobre 2016.

A partire dalla descrizione in coordinate dell'algebra dei vettori del piano e dello spazio, si e' sviluppata l'algebra dei vettori $n-$dimensionali; mediante le operazioni di quest'algebra si sono definite le nozioni di parallelismo, ortogonalita' e modulo per i vettori $n-$dimensionali, e si e' stabilito il permanere di proprieta' fondamentali di queste nozioni. In particolare si sono sviluppati i seguenti argomenti:

Insieme $\mathbb{R}^n$ delle $n-$ple ordinate di numeri reali, che si preferiscono dire "vettori $n-$dimensionali" reali, notazioni; definizione dell'operazione di somma di due vettori e dell'operazione di prodotto di uno scalare per un vettore, proprieta'; definizione di combinazione lineare di una sequenza di vettori secondo una sequenza di scalari; vettori fondamentali di $\mathbb{R}^n$, scrittura di un vettore come combinazione lineare dei vettori fondamentali; definizione della relazione di parallelismo fra vettori, proprieta'.

Definizione dell'operazione di prodotto scalare di due vettori; osservazione sui vettori fondamentali; proprieta' del prodotto scalare: commutativita', comportamento rispetto alle operazioni fondamentali, prodotto scalare di un vettore con se' stesso (non negativita'; positivita' se il vettore e' non nullo); ortogonalita' fra due vettori; osservazione sui vettori fondamentali; proprieta' della relazione di ortogonalita': il vettore nullo e' l'unico ortogonale a se' stesso, simmetria, comportamento rispetto alle combinazioni lineari.

Scomposizione di un vettore come somma di due vettori, uno parallelo ed uno ortogonale ad una dato vettore non nullo, coefficiente di Fourier e relativa formula.

Definizione di modulo di un vettore; osservazione sui vettori fondamentali; proprieta' del modulo: positivita', omogeneita', disuguaglianza triangolare (senza dim), teorema di Pitagora, disuguaglianza di Cauchy-Schwarz (senza dim).

Riferimenti dal testo:

dal cap 8 "'Elementi di geometria e algebra lineare", \$ 3 "Spazi vettoriali":

\$ *3.1 Vettori $n-$dimensionali: lo spazio R^n e spazi vettoriali astratti: fino a "Spazi vettoriali astratti" escluso.*

\$ *3.2 Prodotto scalare in R^n.*

Fuori dal testo:

* Scomposizione di un vettore $n-$dimensionale rispetto ad una direzione data: e' l'estensione naturale di quanto visto per i vettori del piano e dello spazio. Viene riportata qui di seguito:

Proposizione *Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ sia dato un vettore $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$; allora ogni vettore $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si puo' scrivere in uno ed un solo modo come somma*

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\|} + \mathbf{v}_{\perp}$$

di due vettori con $\mathbf{v}_{\|} \parallel \mathbf{r}$ *e* $\mathbf{v}_{\perp} \perp \mathbf{r}$*, che si dicono componenti vettoriali parallela ed ortogonale di* $\mathbf{v}$ *rispetto alla direzione di* $\mathbf{r}$*. Inoltre, si ha*

$$\mathbf{v}_{\|} = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}}\, \mathbf{r}.$$

La dimostrazione di questa proposizione e la relativa formula data nel caso dei vettori del piano vale anche per i vettori $n-$dimensionali (lo si controlli). Per ogni $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ con $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, lo scalare $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})/(\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})$ si dice "coefficiente di Fourier di $\mathbf{b}$ rispetto ad $\mathbf{a}$."

Esempio. Sia fissato in $\mathbb{R}^n$ il vettore $\mathbf{u} = (1, \ldots, 1) = (1)_{i=1}^n$. Allora ogni vettore $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n) = (v_i)_{i=1}^n$ si puo' scrivere in uno ed un solo modo come

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\|} + \mathbf{v}_{\perp}$$

dove: $\mathbf{v}_{\|} = t(1, \ldots, 1) = (t, \ldots, t)$ per un qualche $t \in \mathbb{R}$ cioe' $\mathbf{v}_{\|}$ ha tutte le componenti uguali, e $\mathbf{v}_{\perp} \cdot \mathbf{u} = 0$ cioe' la somma delle componenti di $\mathbf{v}_{\perp}$ e' nulla; inoltre, il coefficiente di Fourier di $\mathbf{v}$ rispetto ad $\mathbf{u}$ e' dato da

$$\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} = \frac{\sum_{i=1}^n v_i}{n} = \mu_{\mathbf{v}},$$

la media aritmetica delle componenti di $\mathbf{v}$, e infine

$$\mathbf{v}_{\|} = (\mu_{\mathbf{v}}, \ldots, \mu_{\mathbf{v}}).$$

*Il teorema di Pitagora della geometria del piano euclideo puo' essere espresso nei termini dell'algebra vettoriale nella forma

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2, \quad \text{se } \mathbf{a} \perp \mathbf{b}$$

(infatti i vettori $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ possono essere visti come i lati e una diagonale di un rettangolo). Questa identita', vincolata dalla condizione $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ cioe' $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$, continua a valere nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$; infatti

$$\begin{aligned} |\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 &= (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \\ &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) + 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) + (\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}) \\ &= |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2. \end{aligned}$$