Prova parziale del 4 novembre 2016 -versione 1. Risoluzione esercizi 1, 2, 3.

Es. 1.

La funzione
$f(x) = \log\left((3x^2 + 2x - 1)/x^2\right)$
e' definita per gli $x \in \mathbb{R}$ tali che
$(3x^2 + 2x - 1)/x^2 > 0$;
essendo
$3x^2 + 2x - 1 > 0 \quad \text{per} \;\; x < -1 \quad \text{oppure} \;\; x > 1/3,$
$x^2 > 0 \quad \text{per ogni} \;\; x \neq 0,$
si ha
$(3x^2 + 2x - 1)/x^2 > 0 \quad \text{per} \;\; x < -1 \quad \text{oppure} \;\; x > 1/3,$
e il dominio naturale di f e'
$D = (-\infty, -1) \cup (1/3, +\infty).$

I punti in $\mathbb{R}^*$ che sono di accumulazione per D ma non appartengono a D sono $-\infty$, -1 (solo superiore), $1/3$ (solo inferiore), $+\infty$.

Considero
$\lim_{x\to+\infty} \log\left((3x^2 + 2x - 1)/x^2\right) = (*)$;
si ha
$\lim_{x\to+\infty} (3x^2 + 2x - 1)/x^2$
$\quad = \lim_{x\to+\infty} (x^2(3 + 2/x - 1/x^2))/x^2$
$\quad = \lim_{x\to+\infty} (3 + 2/x - 1/x^2) = 3$;
dunque
$(*) = \lim_{t\to 3} \log t = \log 3.$

Considero
$\lim_{x\to(1/3)^+} \log\left((3x^2 + 2x - 1)/x^2\right) = (*)$;
si ha
$\lim_{x\to(1/3)} (3x^2 + 2x - 1)/x^2$
$\quad = (3(1/3)^2 + 2(1/3) - 1)/(1/3)^2 = 0$
inoltre, osservando che $(3x^2 + 2x - 1)/x^2 > 0$ per $x > 1/3$,
$\lim_{x\to(1/3)^+} (3x^2 + 2x - 1)/x^2 = 0^+$;
dunque
$(*) = \lim_{t\to 0^+} \log t = -\infty.$

In modo analogo si prova che
$\lim_{x\to-\infty} \log\left((3x^2 + 2x - 1)/x^2\right) = \log 3$;
$\lim_{x\to(-1)^-} \log\left((3x^2 + 2x - 1)/x^2\right) = -\infty.$

Es. 2.

(A) Per definizione,

$(2/3)^n \to 0^+ \quad$ per $n \to +\infty$

significa che per ogni $\epsilon > 0$ si ha

$0 \leq (2/3)^n < \epsilon, \quad$ definitivamente

cioe' esiste un $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$0 \leq (2/3)^n < \epsilon \quad$ per ogni $n > n_0$.

La prima disuguaglianza e' soddisfatta per ogni n; si ha

$(2/3)^n < \epsilon \quad$ equivale a $\quad n > \log_{2/3} \epsilon$

(ho applicato ad entrambi i membri la funzione logaritmo in base $2/3$ -cio' e' ammissibile in quanto entrambi i membri sono positivi- che e' strettamente decrescente in quanto $2/3 < 1$);

ho verificato dunque che la disuguaglianza

$0 \leq (2/3)^n < \epsilon,$

vale definitivamente, precisamente a partire dal primo intero n_0 che e' maggiore di $\log_{2/3} \epsilon$.

(B) Per definizione,

$\log_{3/4} n \to -\infty \quad$ per $n \to +\infty$

significa che per ogni $M > 0$ si ha

$\log_{3/4} n < -M, \quad$ definitivamente

cioe' esiste un $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$\log_{3/4} n < -M \quad$ per ogni $n > n_0$.

Si ha

$\log_{3/4} n < -M \quad$ equivale a $\quad n > (3/4)^{-M}$

(ho applicato ad entrambi i membri la funzione esponenziale in base $3/4$ che e' strettamente decrescente in quanto $3/4 < 1$);

ho verificato dunque che la disuguaglianza

$\log_{3/4} n < -M$

vale definitivamente, precisamente a partire dal primo intero n_0 che e' maggiore di $(3/4)^{-M}$.

Es. 3.

(A1)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{5 \cdot x^2 - 4 \cdot 3^x}{7 \cdot 2^x + 6 \cdot \log x} = \frac{5 \cdot (+\infty) - 4 \cdot (+\infty)}{7 \cdot (+\infty) + 6 \cdot (+\infty)},$$

e il numeratore da' una forma di indecisione $+\infty - \infty$.

Per altra via, usando la gerarchia degli infiniti, si ha

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{5\cdot x^2 - 4\cdot 3^x}{7\cdot 2^x + 6\cdot \log x} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{3^x(5\cdot \frac{x^2}{3^x} - 4)}{2^x(7+6\cdot \frac{\log x}{2^x})} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^x \frac{5\cdot \frac{x^2}{3^x} - 4}{7+6\cdot \frac{\log x}{2^x}} \\
&= (+\infty)\, \frac{5\cdot 0 - 4}{7+6\cdot 0} \\
&= (+\infty)(-\frac{4}{7}) \\
&= -\infty.
\end{aligned}$$

(A2)

$$\lim_{x\to0^+} \frac{5\cdot x^2 - 4\cdot 3^x}{7\cdot 2^x + 6\cdot \log x} = \frac{5\cdot 0 - 4\cdot 1}{7\cdot 1 + 6\cdot(-\infty)} = \frac{-4}{-\infty} = 0^+.$$

(B)

$$\lim_{x\to0} \frac{e^{2x}-1}{\log(1+3x)} = \frac{1-1}{\log(1)} = \frac{0}{0},$$

che e' una forma di indecisione.

Cerco di usare i limiti notevoli che riguardano esponenziali e logaritmi. Si ha

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to0} \frac{e^{2x}-1}{\log(1+3x)} &= \lim_{x\to0} \frac{e^{2x}-1}{2x}\, \frac{3x}{\log(1+3x)}\, \frac{2}{3} \\
&= \lim_{x\to0} \frac{e^{2x}-1}{2x}\, \lim_{x\to0} \frac{3x}{\log(1+3x)}\, \frac{2}{3} \\
&= \lim_{t\to0} \frac{e^{t}-1}{t}\, \lim_{t\to0} \frac{t}{\log(1+t)}\, \frac{2}{3} \\
&= 1\cdot 1\cdot \frac{2}{3} \\
&= \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

(C1) Per $x \to +\infty$ nella somma

$$e^x + \cos x$$

si ha $e^x \to +\infty$ e $-1 \le \cos x \le 1$; osservo che

$$(e^x + \cos x) \ge (e^x - 1) \to +\infty,$$

dunque, per il teorema del confronto,

$$(e^x + \cos x) \to +\infty.$$

(C2) Per $x \to -\infty$ nella somma

$$e^x + \cos x$$

si ha $e^x \to 0^+$; informalmente, per $x \to -\infty$ la somma si comportera' come $\cos x$, che non ha limite. Piu' precisamente:

(1) per la successione $x_n = -2n\pi$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ che tende a $-\infty$ si ha

$$e^{-2n\pi} + \cos(-2n\pi) = e^{-2n\pi} + 1 \to 1;$$

(2) per la successione $x_n = -(2n+1)\pi$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ che tende a $-\infty$ si ha

$$e^{-(2n+1)\pi} + \cos(-(2n+1)\pi) = e^{-2n\pi} - 1 \to -1;$$

dunque la funzione $e^x + \cos x$ non puo' avere limite per $x \to -\infty$.