Prova parziale del 4 novembre 2016 -versione 2. Risoluzione esercizi 4, 5, 6.

Es. 4. Si ha una ed una sola scomposizione

$$(-2,0,1) = (-2,0,1)_{\parallel} + (-2,0,1)_{\perp}$$

dove $(-2,0,1)_{\parallel} \parallel (1,-1,0)$ e $(-2,0,1)_{\perp} \perp (1,-1,0)$.
La componente parallela e' data da

$$\begin{aligned}(-2,0,1)_{\parallel} &= \frac{(1,-1,0)\cdot(-2,0,1)}{(1,-1,0)\cdot(1,-1,0)}\,(1,-1,0)\\ &= -1\,(1,-1,0)\\ &= (-1,1,0)\end{aligned}$$

e la componente ortogonale e'

$$\begin{aligned}(-2,0,1)_{\perp} &= (-2,0,1) - (-2,0,1)_{\parallel}\\ &= (-2,0,1) - (-1,1,0)\\ &= (-1,-1,1).\end{aligned}$$

Dunque si ha la scrittura

$$(-2,0,1) = (-1,1,0) + (-1,-1,1)$$

dove $(-1,1,0) \parallel (1,-1,0)$ e $(-1,-1,1) \perp (1,-1,0)$.
Per il Teorema di Pitagora si deve avere

$$|(-2,0,1)|^2 = |(-1,1,0)|^2 + |(-1,-1,1)|^2$$

(dove $|(a,b,c)| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$ e' il modulo del vettore (a,b,c)) cioe'

$$\left[\sqrt{4+0+1}\right]^2 = \left[\sqrt{1+1+0}\right]^2 + \left[\sqrt{1+1+1}\right]^2, \qquad 5 = 2+3;$$

la verifica ha dato esito positivo.

Es. 5

(A) Considero i due vettori

$$(9,3,1),\ (1,\frac{1}{3},\frac{1}{9}).$$

(A1) Uso la prima definizione di dipendenza/indipendenza lineare. Osservo che

$$(9,3,1) = 9(1,\frac{1}{3},\frac{1}{9}),$$

dunque i due vettori sono lineramente dipendenti.

(A2) Uso la seconda definizione di dipendenza/indipendenza lineare. Mi chiedo se esistono $a, b \in \mathbb{R}$ non entrambi 0 tali che

$$a(9,3,1) + b(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}) = (0,0,0).$$

Questa equazione equivale al sistema

$$\begin{cases} 9a + b = 0 \\ 3a + \frac{b}{3} = 0 \\ a + \frac{b}{9} = 0 \end{cases},$$

che a sua volta equivale al sistema

$$\begin{cases} b = -9a \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases},$$

che ha infinite soluzioni date da $b = -9a$ ed a e' qualsiasi; in particolare, a puo' essere $\neq 0$. Concludo che i due vettori sono linearmente dipendenti.

I due vettori stanno su una stessa retta.

(A) Considero i tre vettori

$$(1,0,2),\ (1,2,3),\ (1,0,0).$$

(A1) Uso la proposizione che caratterizza la dipendenza/indipendenza lineare di vettori in termini di determinanti. La matrice che ha per colonne i tre vettori ha determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-4) = -4 \neq 0,$$

dunque i tre vettori sono lineramente indipendenti.

(A2) Uso la seconda definizione di dipendenza/indipendenza lineare. Mi chiedo se esistono $a, b, c \in \mathbb{R}$ non tutti 0 tali che

$$a(1,0,2) + b(1,2,3) + c(1,0,0) = (0,0,0).$$

Questa equazione equivale al sistema

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ 2b = 0 \\ 2a + 3b = 0 \end{cases},$$

che solo la soluzione $a = b = c = 0$. Concludo che i tre vettori sono linearmente indipendenti.

I tre vettori non sono complanari, cioe' non esiste alcun piano che li contenga simultaneamente.

Es. 6 Considero le funzioni lineari

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3, x_2 + x_3)$$
$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad g(x_1, x_2) = (x_1, x_2, 3x_1 - 2x_2).$$

Si ha

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_3 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

dunque

$$f = f_A, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si ha

$$g\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 3x_2 - 2x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

dunque

$$g = f_B, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Per la funzione $f \circ g$ si ha

$$f \circ g = f_A \circ f_B = f_{AB},$$

dove

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix},$$

cioe'

$$f \circ g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (f \circ g)(x_1, x_2) = (4x_1 - 2x_2, 3x_1 - x_2).$$

Si ha

$$\mathrm{d}(AB) = \mathrm{d}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = -4 + 6 \neq 0,$$

la matrice AB e' invertibile, e

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix}.$$

La funzione $f \circ g$ e' invertibile, e la sua inversa e' data da

$$(f \circ g)^{-1} = (f_{AB})^{-1} = f_{(AB)^{-1}}$$

cioe'

$$(f \circ g)^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (f \circ g)^{-1}(x_1, x_2) = (-\frac{1}{2}x_1 + x_2, -\frac{3}{2}x_1 + 2x_2).$$