Informazioni sulla prova parziale.

La prova durera' 1h 30', Non sara' possibile usare libri, appunti ..., eventualmente solo una calcolatrice non programmabile (non servira'). Ci saranno esercizi presi fra qelli dei seguenti tipi.

Per analisi: verifica di limiti usando la definizione, dominio di una funzione, suoi punti di accumulazione e relativi limiti, limiti di funzioni con uso in particolare della gerarchia fra infiniti, limiti con uso di limiti notevoli.

Per algebra lineare: geometria lineare dello spazio; prodotto scalare, ortogonalita', norma, e proiezioni ortogonali in R^n; vettori linearmente indipendenti, basi; determinanti, coordinate; funzioni lineari, prodotto di matrici, matrice inversa, applicazioni alle funzioni lineari.

Di seguito si riporta la risoluzione di qualche esercizio, a titolo esemplicativo di un possibile livello di dettaglio nella risoluzione degli esercizi.

1. Per la funzione
$$f(x) = \log\left(\frac{4x-3}{2x-1}\right)$$
si determinino: (1) il dominio naturale; (2) l'insieme dei punti di accumulazione del dominio che non stanno nel dominio, e i limiti di $f(x)$ per x che tende ai tali punti.

(1) Il dominio naturale di $f(x)$ e'
$$\left\{x \in \mathbb{R} :\ 2x-1 \neq 0 \ \text{ e } \ \frac{4x-3}{2x-1} > 0\right\} = \ldots = (-\infty, 1/2) \cup (3/4, +\infty).$$

(2) I punti di accumulazione del dominio che non stanno nel dominio sono: $-\infty$, $\frac{1}{2}$ (punto di accumulazione solo superiore), $\frac{3}{4}$ (punto di accumulazione solo inferiore), e $+\infty$. Si ha
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{4x-3}{2x-1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x(4-\frac{3}{x})}{x(2-\frac{1}{x})} = \ldots = \frac{4}{2} = 2;$$
$$\lim_{x\to(1/2)^-} \frac{4x-3}{2x-1} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$
$$\lim_{x\to(3/4)^+} \frac{4x-3}{2x-1} = \frac{0^+}{1/2} = 0^+.$$

Per il teorema sui limiti di funzioni composte si ha
$$\lim_{x\to\pm\infty} \log\left(\frac{4x-3}{2x-1}\right) = \lim_{t\to 2} \log t = \log 2$$
$$\lim_{x\to(1/2)^-} \log\left(\frac{4x-3}{2x-1}\right) = \lim_{t\to+\infty} \log t = +\infty$$
$$\lim_{x\to(3/4)^+} \log\left(\frac{4x-3}{2x-1}\right) = \lim_{t\to 0^+} \log t = -\infty$$

2. Si stabilisca se esistono, e in tal caso quanto valgono, i seguenti limiti

$$(1)\ \lim_{x\to+\infty} x^5(2+\sin x);$$
$$(2)\ \lim_{x\to-\infty} x^3(2+\sin x);$$
$$(3)\ \lim_{x\to+\infty} x(1+\cos x).$$

(1) Per ogni $x \in (0,+\infty)$, da $-1 \leq \sin x \leq 1$ si ha $x^5(2-1) \leq x^5(2+\sin x) \leq x^5(2+1)$ cioe' $x^5 \leq x^5(2+\sin x) \leq 3x^5$. Per $x \to +\infty$ si ha $x^5 \to +\infty$ e $x^5 \leq x(2+\sin x)$, dunque per una variante del teorema del confronto si ha $x(2+\sin x) \to +\infty$.

(2) Per ogni $x \in (-\infty, 0)$, da $-1 \leq \sin x \leq 1$ si ha $x^3(2-1) \geq x^3(2+\sin x) \geq x^3(2+1)$ cioe' $x^3 \geq x^3(2+\sin x) \geq 3x^3$. Per $x \to -\infty$ si ha $x^3 \to -\infty$ e $x^3 \geq x^3(2+\sin x)$, dunque per una variante del teorema del confronto si ha $x^3(2+\sin x) \to -\infty$.

(3) Osservo che:

per la successione che tende a $+\infty$ data da $x_n = (2n+1)\pi$ $(n \geq 0)$ si ha $x_n(1+\cos x_n) = (2n+1)\pi(1-1) = 0 \to 0$;

per la successione che tende a $+\infty$ data da $x_n = 2n\pi$ $(n \geq 0)$ si ha $x_n(1+\cos x_n) = 2n\pi(1+1) = 4n\pi \to +\infty$;

dunque il limite di $x(1+\cos x)$ per $x \to +\infty$ non esiste.

3. Si determinino i seguenti limiti

$$\frac{6e^x+5x^2}{8x^3+7\log x}, \quad \text{per } x \to +\infty, 0^+.$$

Per $x \to +\infty$ si ha

$$\frac{6e^x+5x^2}{8x^3+7\log x} \to \frac{+\infty}{+\infty} = \text{ forma indeterminata.}$$

Per il teorema sulla gerarchia degli infiniti per $x \to +\infty$, si ha che e^x e' di ordine superiore a x^2 e x^3 e' di ordine superiore a $\log x$. Ora

$$\frac{6e^x+5x^2}{8x^3+7\log x} = \frac{e^x(6+5\,\frac{x^2}{e^x})}{x^3(8+7\,\frac{\log x}{x^3})} = (*),$$

inoltre

$$\frac{6+5\,\frac{x^2}{e^x}}{8+7\,\frac{\log x}{x^3}} \to \frac{6+0}{8+0} = \frac{3}{4}$$
$$\frac{e^x}{x^3} \to +\infty$$

e dunque
$$(*) \to +\infty(\frac{3}{4}) = +\infty.$$

Per $x \to 0^+$ si ha
$$\frac{6e^x + 5x^2}{8x^3 + 7\log x} \to \frac{6+0}{0-\infty} = 0^-.$$

4. Per ciascuna delle seguenti sequenze di vettori di $\mathbb{R}^3$ si stabilisca, in due modi diversi, se e linearmente dipendente o indipendente.

(1) $(1,-1,0),(1,0,-1)$

(2) $(1,-1,0),(1,0,-1),(0,1,-1)$

(3) $(1,0,0),(2,1,0),(4,3,1)$ (4) $(1,0,0),(2,1,0),(4,3,1),(5,4,0)$

(1) Primo modo. $(1,-1,0)$ e $(1,0,-1)$ non hanno le componenti proporzionali, dunque sono linearmente indipendenti.

Secondo modo. Mi chiedo se esistono $a,b \in \mathbb{R}$ non tutti nulli tali che
$$a(1,-1,0) + b(1,0,-1) = (0,0,0);$$
questa equazione fra vettori e' equivalente al sistema di equazioni
$$\begin{cases} a+b=0 \\ -a=0 \\ -b=0 \end{cases}$$
che ha solo la soluzione $a = b = 0$; dunque i due vettori sono linearmente indipendenti.

(2) Mostrio tre modi di stabilire la dipendenza/indipendenza lineare dei tre vettori. Primo modo.

Considero la matrice che ha come colonne i vettori dati e ne calcolo il determinante
$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = 1\cdot 1 - (-1)\cdot(-1) = 0$$
dunque i tre vettori sono linearmente dipendenti.

Secondo modo. Mi chiedo se esistono $a,b,c \in \mathbb{R}$ non tutti nulli tali che
$$a(1,-1,0) + b(1,0,-1) + c(0,1,-1) = (0,0,0);$$

questa equazione fra vettori e' equivalente al sistema di equazioni

$$\begin{cases} a+b=0 \\ -a+c=0 \\ -b-c=0 \end{cases} \quad \text{equivalente a} \quad \begin{cases} a+b=0 \\ b+c=0 \end{cases}$$

che ha infinite soluzioni $c = \ \textit{qualsiasi}$, $b = -c$ e $a = c$, in particolare $c = 1$, $b = -1$ e $a = 1$; dunque

$$(1,-1,0) - (1,0,-1) + (0,1,-1) = (0,0,0)$$

e i vettori sono linearmente dipendenti.

Terzo modo. Mi chiedo se $(1,-1,0)$ si puo' ottenere come combinazione lineare di $(1,0-1)$ e $(0,1,-1)$, cioe' se esistono $b,c \in \mathbb{R}$ tali che

$$(1,-1,0) = a(1,0,-1) + b(0,1,-1);$$

questa equazione fra vettori e' equivalente al sistema di equazioni

$$\begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ -a-b=0 \end{cases}$$

che ha una ed una sola soluzione $a = 1$ e $b = -1$ (questi valori soddisfano la terza equazione); dunque

$$(1,-1,0) = (1,0,-1) - (0,1,-1)$$

e i vettori sono linearmente dipendenti.

(3) Primo modo. Considero la matrice che ha come colonne i vettori dati e ne calcolo il determinante

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1 \neq 0$$

dunque i tre vettori sono linearmente indipendenti.

Secondo modo. Mi chiedo se esistono $a,b,c \in \mathbb{R}$ non tutti nulli tali che

$$a(1,0,0) + b(2,1,0) + c(4,3,1) = (0,0,0);$$

questa equazione fra vettori e' equivalente al sistema di equazioni

$$\begin{cases} a+2b+4c=0 \\ \qquad\ b+3c=0 \\ \qquad\qquad c=0 \end{cases}$$

che ha solo la soluzione $c = 0, b = 0$ e $a = 0$; dunque i vettori sono linearmente indipendenti.

(4) Primo modo. Ogni m vettori in $\mathbb{R}^n$ con $m > n$ sono linearmente dipendenti; in particolare, i 4 vettori dati in $\mathbb{R}^3$ sono linearmente dipendenti.

Secondo modo. Mi chiedo se il quarto vettore sia combinazione lineare dei primi tre, cioe' se esistono $a, b, c \in \mathbb{R}$ tali che

$$(5,4,0) = a(1,0,0) + b(2,1,0) + c(4,3,1)$$

questa equazione e' equivalente al sistema di equazioni

$$\begin{cases} a + 2b + 4c = 5 \\ b + 3c = 4 \\ c = 0 \end{cases}$$

che ha soluzione $b = 4$, $a = -3$, $c = 0$; dunque

$$(5,4,0) = -3(1,0,0) + 4(2,1,0) + 0(4,3,1)$$

e i vettori sono linearmente dipendenti.