

Esercizi, II settimana

1. È dato il seguente sottinsieme \mathcal{G} di \mathbb{R}^2 . Determinare un sottinsieme $A \subseteq \mathbb{R}$ tale che \mathcal{G} sia il grafico di una funzione $A \rightarrow \mathbb{R}$, e scrivere tale funzione.

$$\mathcal{G} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy - 2x - 3y + 5 = 0\}.$$

2. È data la funzione $g : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 2x + 1$. Determinare se possibile un sottinsieme $B \subseteq \mathbb{R}$ tale che la funzione $\bar{g} : [1, 2] \rightarrow B$ sia invertibile, e scrivere la sua inversa.

3. È data la funzione $i : \mathbb{R}_{\neq 0} \rightarrow \mathbb{R}$, $i(x) = x^{-1}$. Dimostrare che la funzione i è decrescente su $] -\infty, 0[$ e su $]0, +\infty[$, ma non su $\mathbb{R}_{\neq 0}$.

4. Sono date la funzione esponenziale $\exp_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\exp_3(x) = 3^x$ e la progressione aritmetica $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $a(n) = 5n + 7$. Provare che la successione $b : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $b(n) = \exp_3(a(n))$ è una progressione geometrica.

5. È data l'espressione

$$\log_2(\sqrt{10}) - \log_2(5) + \log_2(\sqrt[3]{100}).$$

Scrivere l'espressione come un'unico logaritmo, e determinarne (senza usare calcolatrice) il valore approssimato agli interi.

6. Dimostrare la seguente regola di cambiamento di base per i logaritmi:

$$\log_b(a) = \log_b(c) \log_c(a), \quad (0 < b, c \neq 1, 0 < a)$$

7. Per ciascuna delle seguenti sequenze di vettori di \mathbb{R}^2 , stabilire se è linearmente indipendente

$$(1, 2), (3, 4)$$

$$(\sqrt{2}, 2), (1, \sqrt{2})$$

$$(1, 2), (1, 3), (1, 4)$$

8. Per ciascuna delle seguenti sequenze di vettori di \mathbb{R}^3 , stabilire se è linearmente indipendente

$$(0, 0, 0), (1, 2, 3)$$

$$(1, 2, 3), (0, 5, 6), (0, 0, 9)$$

$$(1, 1, 0), (0, -1, -1), (-1, 0, -1)$$

9. Per ciascuna delle seguenti sequenze di vettori di \mathbb{R}^4 , stabilire se è linearmente indipendente

$$(2, -3, 1, 4), (0, 3, -4, 2), (0, 0, 4, -5)$$

$$(1, 0, 1, 2), (0, 1, 2, 3), (3, -2, -1, 0)$$