Lezione 6, Analisi, 26.09.2017

Funzioni reali di una variabile reale

Concetti generali

Prodotto cartesiano Dati un primo insieme A ed un secondo insieme B, si possono formare le coppie ordinate aventi prima componente in A e seconda componente in B; due coppie ordinate si dicono uguali se le loro componenti corrispondenti sono uguali:

$$(a_1, b_1) = (a_2, b_2) \quad \text{se e solo se} \quad a_1 = b_1 \text{ e } a_2 = b_2.$$

Queste coppie ordinate formano un nuovo insieme, detto "prodotto cartesiano" di A per B, ed indicato con $A \times B$. In simboli:

$$A \times B = \{(a, b) |\, a \in A, b \in B\}.$$

Nel caso finito, il prodotto cartesiano $A \times B$ si può rappresentare con una disposizione rettangolare di punti, con colonne etichettate dagli elementi di A e righe etichettate da elementi di B. Ad esempio, per gli insiemi $A = \{1, \ldots, 4\}$ e $B = \{1, \ldots, 5\}$, l'insieme $A \times B$ si può rappresentare come

$$\begin{array}{c|cccc}
5 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
4 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
3 & \cdot & \bullet & \cdot & \cdot \\
2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\hline
 & 1 & 2 & 3 & 4
\end{array}$$

Qui la coppia $(2, 3)$ è rappresentata dal punto $\bullet$.

Per ciascun insieme finito A, indicheremo con $|A|$ il numero dei suoi elementi. Se A e B sono finiti, allora anche $A \times B$ è finto, inoltre

$$|A \times B| = |A||B|$$

Funzioni Una "funzione" f da un insieme A verso un insieme B è una "legge" che associa a ciscun elemento di A uno ed un solo elemento di B; A si dice "dominio" di f e B si dice "codominio" di f, e si scrive $f : A \to B$. Se f associa ad un elemento a di A un elemento b di B si scrive $b = f(a)$, e si dice che b è la "immagine" di a e a è una "preimmagine" di b.

Si dice che due funzioni $f : A \to B$ e $g : A \to B$ aventi lo stesso dominio e lo stesso codominio sono uguali se, e si scrive $f = g$, se e solo se

$$\forall a \in A, \quad f(a) = g(a)$$

Esempio. Siano $f, g : \mathbb{N}_{>0} \to \mathbb{N}$ definite da

$$f(n) = \sum_{i=1}^{n} i, \qquad (n \in \mathbb{N}_{>0})$$
$$g(n) = \frac{(n+1)n}{2}, \qquad (n \in \mathbb{N}_{>0})$$

Si ha

$$\forall n \in \mathbb{N}_{>0}, \quad \sum_{i=1}^{n} i = \frac{(n+1)n}{2};$$

dunque $f = g$.

Grafico Il "grafico" di una funzione è il sottinsieme del prodotto cartesiano del dominio per il codominio costituito delle coppie ordinate la cui seconda componente è l'immagine della prima componente.
In simboli, per una funzione $f : A \to B$

$$\text{grafico di } f \ = \{(a, b) \in A \times B |\ b = f(a)\},$$

equivalentemente

$$\text{grafico di } f \ = \{(a, f(a))| \ \in A\}.$$

Una funzione fra due insiemi finiti si può dare scrivendo per ciascun elemento del dominio la sua immagine; il suo grafico si può dare elencando le coppie ordinate che lo compongono, e può essere rappresentato come un sottinsieme di una disposizione rettangolare di punti.
Una funzione reale di variabile reale $f : A \to B$ con $A, B \subseteq \mathbb{R}$ si può dare introducendo una variabile sul dominio A e una espressione che assuma uno ed un solo valore in corrispondenza di ogni valore della variabile. Il grafico della funzione può essere identificato con un sottinsieme del "rettangolo" $A \times B$ nel piano cartesiano.
Se il dominio della funzione è un intervallo in $\mathbb{R}$, allora il grafico di f è una "linea".

Esempio 1. Una funzione f dall'insieme $A = \{1, 2, 3, 4\}$ verso l'insieme $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ è data dalla tabella

a	1	2	3	4
f(a)	2	1	4	1

il grafico di f e dato da

$$\text{grafico di } f = \{(1, 2), (2, 1), (3, 4), (4, 1)\},$$

e può essere rappresentato da

$$\begin{array}{c|cccc}
5 & \circ & \circ & \circ & \circ \\
4 & \circ & \circ & \bullet & \circ \\
3 & \circ & \circ & \circ & \circ \\
2 & \bullet & \circ & \circ & \circ \\
1 & \circ & \bullet & \circ & \bullet \\
\hline
 & 1 & 2 & 3 & 4
\end{array}.$$

Esempio 2 Siano $a, q \in \mathbb{R}$ fissati. La progressione aritmetica di termine iniziale a e ragione q si può riguardare come una funzione

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \quad f(n) = a + qn, \quad (n \in \mathbb{N})$$

e si ha

$$\text{grafico di } f = \{(n, r) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R} |\ r = a + qn\} = \{(n, a + qn) |\ n \in \mathbb{N}\}$$

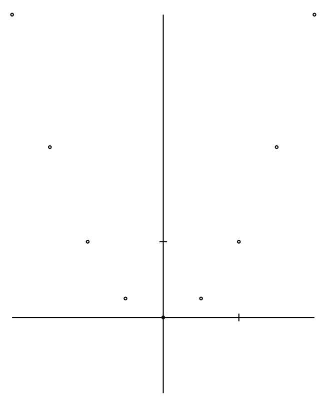
Esempio 3 Una funzione da $\mathbb{R}$ ad $\mathbb{R}$ è data da

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2, \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Suo grafico:

$$\text{grafico di } f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ y = x^2\} = \{(x, x^2) |\ x \in \mathbb{R}\}.$$

Rappresentazione di alcuni punti del grafico:



Una rappresentazione (arbitraria) del grafico della funzione si ottiene tracciando in qualche modo una linea che passa per questi punti

Grafici; caratterizzazione Dati due insiemi A, B, si ha che un sottinsieme $\mathcal{G} \subseteq A \times B$ è il grafico di una funzione da A verso B se e solo se

per ciascun $a \in A$ esiste uno ed un solo $b \in B$ tale che $(a, b) \in \mathcal{G}$

Se A, B sono due sottinsiemi di $\mathbb{R}$, allora $\mathcal{G}$ può essere identificato con un sottinsieme del rettangolo $A \times B$ nel piano cartesiano, ed è il grafico di una funzione da A verso B se e solo se

ciascuna retta $x = a$, con $a \in A$, interseca $\mathcal{G}$ in uno ed un solo punto.

Esempi.

L'insieme
$$\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} |\ xy = 1\}$$
non è il grafico di una funzione $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in quanto per l'elemento $0 \in \mathbb{R}$ non esiste alcun $y \in \mathbb{R}$ tale che $0y = 1$.

L'insieme
$$\{(x,y) \in \mathbb{R}_{\neq 0} \times \mathbb{R} |\ xy = 1\}$$
è il grafico di una funzione $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in quanto per ogni $x \in \mathbb{R}_{\neq 0}$ esiste uno ed un solo $y \in \mathbb{R}$ tale che $xy = 1$ (ed è $y = x^{-1}$.)

L'insieme
$$\{(x,y) \in \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} |\ xy^2 = 1\}$$
non è il grafico di una funzione $\mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ in quanto per l'elemento $1 \in \mathbb{R}_{>0}$ esistono due valori di y tali che $xy^2 = 1$ ($y = 1$ e $y = -1$).

Funzioni iniettive, ... funzione inversa

Funzioni iniettive. Una funzione si dice "iniettiva" se conserva la relazione di diversità fra elementi. In simboli, $f : A \to B$ si dice iniettiva se
$$\forall a_1, a_2 \in A, \quad a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2);$$
questa condizione si può esprimere anche nella forma
$$\forall a_1, a_2 \in A, \quad f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2.$$
Se $f : A \to B$ è una funzione fra due sottinsiemi A, B di $\mathbb{R}$, allora f è iniettiva se e solo se

ciascuna retta $y = b$, con $b \in B$, interseca il grafico di f in al più un punto.

Esempio 1 La funzione f dall'insieme $A = \{1,2,3,4\}$ verso l'insieme $B = \{1,2,3,4,5\}$ data dalla tabella

a	1	2	3	4
f(a)	2	1	4	1

non è iniettiva in quanto esistono due lementi diversi del dominio (2 e 4) che hanno la stessa immagine (1).

Esempio 2 Siano $a, q \in \mathbb{R}$ fissati, e
$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \quad f(n) = a + qn, \quad (n \in \mathbb{N})$$
Per $q \neq 0$, la funzione f è iniettiva in quanto per ogni $n_1, n_2 \in \mathbb{N}_{>0}$, da $f(n_1) = f(n_2)$ segue $a + qn_1 = a + qn_2$ da cui segue $n_1 = n_2$. Per $q = 0$, la funzione f 'e costante su $\mathbb{N}_{>0}$ e dunque non è iniettiva.

Esempio 3 La funzione

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2, \quad (x \in \mathbb{R})$$

non è iniettiva in quanto esistono elementi diversi del dominio (ad esempio -1 e +1) che hanno la stessa immagine (1). La funzione

$$g : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = x^2, \quad (x \in \mathbb{R}_{>0})$$

invece è iniettiva.

Fra insiemi finiti. Fatto. Siano A, B insiemi finiti. Se esiste una funzione iniettiva da A verso B, allora $|A| \leq |B|$. Viceversa, se $|A| \leq |B|$, allora esistono delle funzioni iniettive da A verso B. Precisamente, posto $|A| = m$ e $|B| = n$, se $m \leq n$, esistono esattamente

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$$

funzioni iniettive da A verso B. Infatti, indicati con $a_1, a_2, \ldots, a_m$ gli elementi di A, si possono costruire le funzioni iniettive $A \to B$ come segue: si associa ad a_1 un qualsiasi elemento b_1 in B, si associa ad a_2 un qualsiasi elemento b_2 diverso da b_1 in B, ..., si associa ad a_m un qualsiasi elemento b_m diverso da $b_1, b_2, \ldots, b_{m-1}$ in B; essendo $|B| = n$, questa costruzione si può effettuare in esattamente $n(n-1)\cdots(n-m+1)$ modi diversi.

Funzioni suriettive. Una funzione si dice "suriettiva" se ogni elemento del codominio si può ottenere come immagine di qualche elemento del dominio. In simboli, $f : A \to B$ è suriettiva se

$$\forall b \in B, \; \exists a \in A : \quad f(a) = b.$$

Se $f : A \to B$ è una funzione fra due sottinsiemi A, B di $\mathbb{R}$, allora f è iniettiva se e solo se

> ciascuna retta $y = b$, con $b \in B$, interseca il grafico di f in almeno un punto.

Esempio 1 La funzione f dall'insieme $A = \{1, 2, 3, 4\}$ verso l'insieme $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ data dalla tabella

a	1	2	3	4
f(a)	2	1	4	1

non è suriettiva in quanto esiste un elemento del codominio (5) che non è immagine di alcun elemento.

Esempio 3 La funzione

$$g : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = x^2, \quad (x \in \mathbb{R}_{>0})$$

non è suriettiva, in quanto esistono degli elementi del codominio $\mathbb{R}$ (ad esempio -1) che non sono immagine di alcun elemento. La funzione

$$g : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}, \quad g(x) = x^2, \quad (x \in \mathbb{R}_{>0})$$

invece è suriettiva.

Funzioni biiettive. Una funzione si dice "biiettiva" se ciascun elemento del codominio è immagine di uno ed un solo elemento del dominio, ciè se è sia iniettiva che suriettiva. In altri termini, una funzione $f : A \to B$ si dice biiettiva se per ogni $b \in B$ l'equazione

$$f(\square) = b$$

nell'incognita $\square$ su A ha una ed una sola soluzione. In tal caso, si definsce la "funzione inversa" $f^{-1} : B \to A$ ponendo

$$f^{-1}(b) = (\text{ unica soluzione in } A \text{ dell'equazione } \ f(\square) = b) \qquad (b \in B).$$

Osservazione.

$$(a, b) \in (\text{grafico di } f) \quad \text{ se e solo se } \quad (b, a) \in (\text{grafico di } f^{-1}).$$

Infatti, $(a, b) \in (\text{grafico di } f)$ equivale a $f(a) = b$ equivale a $a = f^{-1}(b)$ equivale a $(b, a) \in (\text{grafico di } f^{-1})$.

Per funzioni f reali di variabile reale invertibili, il grafico $y = f^{-1}(x)$ della funzione $f^{-1} : B \to A$ è il simmetrico del grafico $y = f(x)$ della funzione $f : A \to B$ rispetto alla retta $y = x$ bisettrice del primo e terzo quadrante.

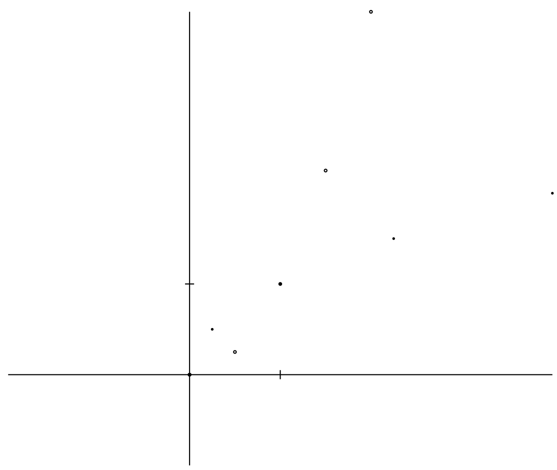
Esempio 3. La funzione

$$g : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}, \quad g(x) = x^2, \quad (x \in \mathbb{R}_{>0})$$

è biiettiva. Per definizione, si ha

$$g^{-1} : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}, \quad g^{-1}(x) = (\text{ unica soluzione di } \square^2 = x) = \sqrt{x}, \quad (x \in \mathbb{R}_{>0}).$$

Nella figura seguente sono riportati con "$\circ$" alcuni punti del grafico $y = x^2$ ($x \in \mathbb{R}_{>0}$) e con "$\bullet$" i punti corrispondenti del grafico $y = \sqrt{x}$ ($x \in \mathbb{R}_{>0}$).



Insiemi finiti Per una funzione $f : A \to B$ fra insiemi finiti, le seguenti proprietà sono equivalenti: (1) f è iniettiva; (2) f è suriettiva; (3) f è biiettiva. Una biiezione da un insieme finito A in sé stesso si dice "permutazione" di A; se A ha n elementi, il numero delle permutazioni di A è uguale a

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1;$$

questo numero si dice "n fattoriale" e si indica con $n!$.