Lezione 7, Analisi, 27.09.2017

Funzioni reali di una variabile reale

Funzioni monotone

Proprietà dell'ordine Abbiamo visto che la relazione d'ordine fra i numeri reali è compatibile con le operazioni, in particolare che $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, se $a \leq b$ e $0 \leq c$ allora $ac \leq bc$; equivalentemente: $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, se $a < b$ e $0 < c$ allora $ac < bc$.
Questa proprietà può essere espressa in una forma più forte

$$\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad (0 < a < b \text{ e } 0 < c < d) \quad \Rightarrow \quad ac < bd.$$

Infatti,

$$\begin{aligned} &(0 < a < b \text{ e } 0 < c) \ \Rightarrow \ ac < bc \\ &(0 < b \text{ e } 0 < c < d) \Rightarrow bc < bd \\ &(ab < bc \text{ e } bc < bd) \Rightarrow ac < bd. \end{aligned}$$

Osserviamo che se nelle ipotesi si sostituisce $0 < a < b$ con $a < b$, si ottiene un'affermazione falsa. Infatti:

$$(-2 < -1 \ \text{ e } \ 1 < 5), \ \text{ ma } \ 2 \times 1 (= -2) > -1 \times 5 (= -5).$$

Grafici. Di seguito descriviamo le prime nozioni sulle funzioni reali di variabile reale, e le proprietà salienti dei primi tipi di funzioni fondamenmtali. Per i relativi grafici rimandiamo al sito.

`http://maxima-online.org/index.html`

L'istruzione per ottenere il grafico di una funzione $f : [a, b] \to [c, d]$ è

```
plot2d([f(x)], [x,a,b], [y,c,d]);
```

L'istruzione per ottenere il grafico comparato di più funzioni $f(x), g(x), \ldots$ si ottiene da questa istruzione sostituendo a $f(x)$ la sequenza $f(x), g(x), \ldots$

Funzioni monotone Una funzione $f : A \to B$, con $A, B \subseteq \mathbb{R}$ si dice "crescente" se

$$\forall x_1, x_2 \in A, \quad x_1 < x_2 \ \Rightarrow \ f(x_1) \leq f(x_2),$$

e si dice "strettamente crescente" se

$$\forall x_1, x_2 \in A, \quad x_1 < x_2 \ \Rightarrow \ f(x_1) < f(x_2).$$

Analogamente per funzione "decrescente" e "strettamente decrescente". Una funzione si dice "monotona" se è "crescente oppure decrescente"; analogamente per "strettamente monotona".

Esempi.

(0) Una funzione costante è sia crescente che desrescente; viceversa, una funzione sia crescente che decrescente è costante.

(1) Una funzione polinomiale di I grado $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $p(x) = mx + q$ (x variabile in $\mathbb{R}$; $m \neq 0$ e q numeri in $\mathbb{R}$) è sempre strettamente monotona, precisamente: strettamente crescente se $m > 0$ e strettamente decrescente se $m < 0$ (lo si verifichi usando la definzione e le proprietà dell'ordine).

(2) La funzione $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $p(x) = x^2$ ($x \in \mathbb{R}$) non è monotona (lo si verifichi usando la definzione).

(2') La funzione $p : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$, $p(x) = x^2$ ($x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$) è strettamente crescente. Infatti, per ogni $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ con $0 \leq x_1 < x_2$, da ($0 \leq x_1 < x_2$ e $0 \leq x_1 < x_2$) per le proprietà dell'ordine si ha $x_1^2 < x_2^2$, cioè $p(x_1) < p(x_2)$.

(3) La funzione $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $c(x) = x^3$ ($x \in \mathbb{R}$) è strettamente crescente. Ce ne si può fare un'idea valutando la funzione su un insieme di punti (ad esempio $0, \pm 1/2, \pm 1, \pm 2$). Si può dare una dimostrazione secondo le lineee del punto precedente (distinguendo i casi $x_1 < x_2 < 0$, $x_1 < 0 < x_2$, $0 < x_1 < x_2$)

Proposizione 1 *(1) Ciascuna funzione strettamente monotona $f : A \to B$ è iniettiva; (2) Se una funzione strettamente crescente $f : A \to B$ è invertibile, allora anche la sua inversa $f^{-1} : B \to A$ è strettamente crescente; analogamente per decrescente.*

La (1) si può provare come segue. Per ogni $x_1, x_2 \in A$, se $x_1 \neq x_2$ allora si ha $x_1 < x_2$ oppure $x_2 < x_1$ da cui $f(x_1) < f(x_2)$ oppure $f(x_2) < f(x_1)$ (essendo f strettamente crescente), da cui $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Applicazione. La funzione $p : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $p(x) = x^2$ ($x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$) è invertibile e strettamente crescente. Dalla proposizione segue che anche la funzione inversa $r : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $r(x) = \sqrt{x}$ ($x \in \mathbb{R}_{>0}$) è strettamente crescente.

Funzioni potenza

Funzioni potenza, ad esponente reale positivo. Per ciascun numero naturale n, consideriamola funzione "elevamento alla poteza $n-$ma"

$$p_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad p_n(x) = x^n.$$

Osserviamo che

$$p_n(-x) = (-x)^n = (-1)^n x^n = \left\{ \begin{array}{ll} x^n & \text{se } n \text{ pari} \\ -x^n & \text{se } n \text{ dispari} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ll} p_n(x) & \text{se } n \text{ pari} \\ -p_n(x) & \text{se } n \text{ dispari} \end{array} \right.$$

Ciò suggerisce la seguente definizione. Sia $f : A \to B$ ($A, B \subseteq \mathbb{R}$) una funzione definita su un insieme A simmetrico rispetto a 0 (cioè per ogni x si ha che $x \in A$ se e solo se $-x \in A$).

Si dice che f è "pari" se
$$\forall x \in A, \quad f(-x) = f(x);$$
si dice che f è "dispari" se
$$\forall x \in A, \quad f(-x) = -f(x).$$
Una tale funzione è completamente determinata dalla sua restrizione alla parte positiva di A :

se f è pari, allora il grafico di f sulla parte negativa di A si ottiene, per simmetria rispetto all'asse $x = 0$, dal grafico di f sulla parte positiva di A;

se f è dispari, allora il grafico di f sulla parte negativa du A si ottiene, per simmetria rispetto al punto $(0, 0)$, dal grafico di f sulla parte positiva di A;

Si prova che

> per ogni $n \geq 1$, la restrizione $\bar{p}_n : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ della funzione potenza p_n al semiasse positivo $\mathbb{R}_{\geq 0}$ è una funzione strettamente crescente.

Per farsi un'idea dei grafici delle funzioni potenza ad esponente intero positivo:

```
plot2d([x^2, x^3, x^4], [x,-2,2], [y,-16,16]).
```

Piu in generale, per ciascun numero reale $r \geq 0$, consideriamo la funzione "elevamento alla poteza $r-$ma"
$$p_r : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}, \quad p_r(x) = x^r.$$
Si prova che

> per ogni $r > 0$, la funzione potenza p_r è una funzione strettamente crescente.

Per farsi un'idea dei grafici delle funzioni potenza ad esponente reale positivo:

```
plot2d([x^2, x^3, x^(1/2), x^(1/3)], [x,0,2], [y,0,8]).
```

Funzioni potenza, ad esponente reale negativo. Per ciascun numero intero negativo n, consideriamola funzione "elevamento alla poteza $n-$ma"
$$p_n : \mathbb{R}_{\neq 0} \to \mathbb{R}, \quad p_n(x) = x^n.$$
Come sopra, si ha che
$$p_n(-x) = \begin{cases} p_n(x) & \text{se } n \text{ pari} \\ -p_n(x) & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases}$$

Si prova che

> per ogni $n < 0$, la restrizione $\bar{p}_n : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ della funzione potenza p_n al semiasse positivo $\mathbb{R}_{\geq 0}$ è una funzione strettamente decrescente.

Per farsi un'idea comparata dei grafici delle funzioni potenza ad esponente intero negativo:

```
plot2d([x^{-1}, x^{-2}, x^{-3}], [x,-2,2], [y,-16,16]).
```

Piu in generale, per ciascun numero reale $r < 0$, consideriamo la funzione "elevamento alla poteza $r-$ma"

$$p_r : \mathbb{R}_{\neq 0} \to \mathbb{R}, \quad p_r(x) = x^r.$$

Si prova che

> per ogni $r < 0$, la funzione potenza p_r è una funzione strettamente decrescente.

Per farsi un'idea comparata dei grafici delle funzioni potenza ad esponente reale negativo:

```
plot2d([x^{-2}, x^{-3}, x^(-1/2), x^(-1/3)], [x,0,2], [y,0,8]).
```

Funzioni esponenziali e logaritmiche

Funzioni esponenziali A partire dai casi $b = 2$ e $b = \frac{1}{2}$, si e' considerata per ciascun $b > 0$ fissato, la funzione esponenziale

$$\exp_b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \exp_b(x) = b^x.$$

ciascuna di queste funzioni assume solo valori strettamente positivi. Si e' enunciato che:
- per $b > 1$ la funzione exp_b e' strettamente crescente;
- per $b = 1$ la funzione exp_1 e' costante uguale a 1;
- per $0 < b < 1$ la funzione exp_b e' strettamente descrescente.

(La seconda affermaziione e' ovvia; la prima e la terza sono ovvie su $\mathbb{N}$, chiare su $\mathbb{Z}$, e si possono motivare in modo elementare su $\mathbb{Q}$.)

Proprietà delle funzioni esponenziali rispetto alle operazioni:

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \quad exp_b(x_1 + x_2) = exp_b(x_1)exp_b(x_2)$$
$$\forall \alpha, x \in \mathbb{R}, \quad exp_b(\alpha x) = (exp_b(x))^\alpha$$

Per farsi un'idea comparata dei grafici delle funzioni esponenziali:

```
plot2d([2^x, 3^x, (-1/2)^x, (1/3)^x], [x,-2,2], [y,0,9]).
```

Logaritmi Consideriamo l'equazione

$2^x = 3$

nell'incognita x in $\mathbb{R}$. Per la monotonia della funzione esponenziale, se l'equazione ha una soluzione in $\mathbb{R}$, questa e' unica. Si prova in modo non banale che una tale soluzione esiste.

Diamo un'idea molto primitiva di come si possa costruire. Consideriamo la disequazione

$2^x \leq 3$

nell'incognita x in $\mathbb{Q}^+$; fra le soluzioni intere ce ne e' una massima ed e' 1; fra le soluzioni con una cifra decimale ce ne e' una massima ed e' $1,1$ (infatti $2^{11/10} < 3$ in quanto $2^{11} < 3^{10}$ mentre $2^{12/10} > 3$ in quanto $2^{12} > 3^{10}$); fra le soluzioni con due cifre decimali ce ne e' una massima ... si ottiene cosi' un numero reale $1,1\ldots$. Si puo' dimostrare che questo numero e' una soluzione dell'equazione data. Si dice che $1,1\ldots$ e' il logaritmo di 3 in base 2 e si scrive

$$\log_2(3) = 1,1\ldots$$

Logaritmi in base 2 Consideriamo ora l'equazione

$2^x = a$

nell'incognita x in $\mathbb{R}$, dove a e' un parametro in $\mathbb{R}$. Per ogni $a \leq 0$ l'equazione data non ha soluzioni. Si prova in modo non banale per ogni $a > 0$ l'equazione ha una ed una sola soluzione; questa soluzione viene detta "logaritmo di a in base 2" e viene indicata con $\log_2(a)$. Dunque per definizione si ha

$$\log_2(a) = c \quad \Leftrightarrow \quad 2^c = a;$$

in altri termini, $\log_2(a)$ e' caratterizzato dalla condizione

$$2^{\log_2(a)} = a.$$

Logaritmi Consideriamo l'equazione

$b^x = a$

nell'incognita x in $\mathbb{R}$, dove a e b sono due parametri in $\mathbb{R}$. Affinche' la potenza b^x sia definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ e' necessario che $b > 0$. Osserviamo che per $b = 1$ l'equazione diviene $1^x = a$, che per $a \neq 1$ non ha soluzioni, e per $a = 1$ ha per soluzione ogni $x \in \mathbb{R}$.

Si prova in modo non banale per ogni $b \in \mathbb{R}$ con $0 < b \neq 1$ ed ogni $a \in \mathbb{R}$ con $a > 0$, l'equazione ha una ed una sola soluzione in $\mathbb{R}$; questa soluzione viene detta "logaritmo di a in base b" e viene indicata con $\log_b(a)$. Dunque per definizione si ha

$$\log_b(a) = c \quad \Leftrightarrow \quad b^c = a;$$

in altri termini, $\log_b(a)$ e' caratterizzato dalla condizione

$$b^{\log_b(a)} = a.$$

Dalle proprieta' delle potenze seguono le seguenti proprieta' dei logaritmi

$$\log_b(a_1a_2) = \log_b(a_1) + \log_b(a_2) \qquad (a_1, a_2 > 0)$$
$$\log_b(a^\alpha) = \alpha \log_b(a) \qquad (a > 0)$$

Proviamo la prima proprieta'. Si ha

$$b^{\log_b(a_1)} = a_1, \qquad b^{\log_b(a_2)} = a_2;$$

moltiplicando membro a membro la seconda e la terza uguaglianza ed usando la prima proprieta' delle potenze si ottiene

$$b^{\log_b(a_1)+\log_b(a_2)} = a_1a_2,$$

dunque, per la stessa definizione di logaritmo si ha

$$\log_b(a_1a_2) = \log_b(a_1) + \log_b(a_2).$$

Nella pratica vengono usati logaritmi in base 2, in base 10 e in base e dove $e = 2,718\ldots$ e' il numero di Nepero. Di regola, noi useremo questi ultimi, e scriveremo $\log_e(a)$ semplicemente $\log(a)$.

Esempio. Valutazione approssimata di $\log_{10} 3.937.428$, agli interi. Si ha

$$1.000.000(= 10^6) < 3.937.428 < 10.000.000(= 10^7)$$

dunque, poichè la funzione $\log_{10}$ è strettamente crescente, si ha

$$6 < \log_{10} 3.937.428 < 7,$$

e dunque $\log_{10} 3.937.4286, \ldots$

Funzioni esponenziali e funzioni logaritmiche Per ciascun $b \in \mathbb{R}$, con $0 < b \neq 1$, la funzione

$$\exp_b : \mathbb{R} \to [0, +\infty[, \qquad x \mapsto b^x$$

e' biiettiva ed ha per funzione inversa la funzione logaritmo in base b

$$\log_b : [0, +\infty[\to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \log_b(x).$$

Dai grafici delle funzioni esponenziali, per simmetria rispetto alla retta $y = x$, si deducono grafici delle funzioni logaritmo.

Per farsi un'idea comparata dei grafici delle funzioni esponenziali e logaritmiche:

```
plot2d([2^x, (1/2)^x, log(x)/log(2), log(x)/log(1/2)], [x,-2,2], [y,-8,4]).
```