Lezione 8, Algebra lineare, 27.09.2017

Spazi vettoriali

Equazioni lineari

Fra le equazioni in una incognita x, le più semplici sono quelle di primo grado, cioè quelle che si possono ricondurre alla forma

$$ax = b,$$

dove a e b sono numeri reali dati, detti rispettivamente "coefficiente" e "termine noto" dell'equazione. L'equazione $ax = b$ ha: (1) per $a \neq 0$, una ed una sola soluzione, data da $x = a^{-1}b$; (2) per $a = 0$ e $b \neq 0$, nessuna soluzione; (3) per $a = b = 0$, infinite soluzioni, tutti i numeri reali.

Fra le equazioni in due incognite x, y le più semplici sono quelle di primo grado, cioè quelle che si possono ricondurre alla forma

$$ax + by = c,$$

dove a, b e c sono numeri reali dati, detti rispettivamente i due "coefficienti" e il "termine noto" dell'equazione. L'equazione $ax + by = c$ ha: (1) per $a \neq 0$ o $b \neq 0$, infinite soluzioni; (2) per $a = b = 0$ e $c \neq 0$, nessuna soluzione; (3) per $a = b = c = 0$, infinite soluzioni.

Esempi. L'equazione lineare nelle incognite x, y data da $2x + 5y = 10$ ha infinite soluzioni date da $x = -5/2t + 5$ e $y = t$, con t qualsiasi numero reale. L'equazione lineare nelle incognite x, y data da $x = 10$ ha infinite soluzioni date da $x = 10$ e $y = t$, con t qualsiasi numero reale.

Quando si considerano più incognite, al posto di dire "equazione di primo grado" si preferisce dire "equazione lineare".

Definizione 1 *Un'equazione lineare in n incognite x_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ è un'equazione che si può scrivere nella forma*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b$$

dove gli a_i e b sono numeri reali dati, detti rispettivamente i "coefficienti" e il "termine noto" dell'equazione. Una soluzione di una tale equazione è una $n-$pla ordinata di numeri reali s_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ che sostituiti ordinatamente alle incognite x_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ rendono vera l'uguaglianza, cioè $\sum_{i=1}^{n} a_i s_i = b$.
Un'equazione lineare "omogenea" è un'equazione lineare nella quale il termine noto è nullo, cioè un'equazione della forma

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0.$$

Sottospazi

Iniziamo col descrivere due nuovi esempi di spazi vettoriali.

Esempio 1. Nello spazio vettoriale geometrico tridimensionale $\mathcal{G}_o^3$ dei vettori applicati in un punto fissato O dello spazio, fissiamo un piano passante per O, e consideriamo i vettori che stanno su tale piano. Si può osservare che: (1) se due vettori a, b stanno sul piano, allora anche il vettore loro somma $a + b$ sta sul piano (poichè sta sul parallelogramma che ha lati consecutivi a e b); (2) se α è un numero reale e a un vettore sta sul piano, allora anche il vettore αa sta sul piano (poichè sta sulla retta individuata da a) L'insieme di questi vettori è dunque chiuso rispetto alle operazioni definite sullo spazio vettoriale tridimensionale $\mathcal{G}_o^3$, e risulta essere a sua volta uno spazio vettoriale (che si può identificare con lo spazio vettoriale bidimensionale $\mathcal{G}_o^2$).

Esempio 2. Consideriamo l'insieme delle soluzioni dell'equazione lineare nelle incognite x_1, x_2, x_3 data da

$$2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0.$$

Osserviamo che: (1) se (s_1, s_2, s_3) e (t_1, t_2, t_3) sono due soluzioni dell'equazione, allora anche la loro somma $(s_1 + t_1, s_2 + t_2, s_3 + t_3)$ è una soluzione dell'equazione (poichè da $2s_1 + 3s_2 + 5s_3 = 0$ e $2t_1 + 3t_2 + 5t_3 = 0$, sommando membro a membro, segue $2(s_1 + t_1) + 3(s_2 + t_2) + 5(s_3 + t_3) = 0$); (2) se (s_1, s_2, s_3) è una soluzione dell'equazione, allora anche ogni suo multiplo scalare $(\alpha s_1, \alpha s_2, \alpha s_3)$ è una soluzione dell'equazione (poichè da $2s_1 + 3s_2 + 5s_3 = 0$, moltiplicando i due membri per α, segue $2(\alpha s_1) + 3(\alpha s_2) + 5(\alpha s_3) = 0$) L'insieme di questi vettori è dunque chiuso rispetto alle operazioni definite sullo spazio vettoriale tridimensionale $\mathbb{R}^3$, e risulta essere a sua volta uno spazio vettoriale (che si vedrà come identificare con lo spazio vettoriale bidimensionale $\mathbb{R}^2$).

Proposizione 1 *Sia V uno spazio vettoriale e sia $W \subseteq V$ un sottinsieme di V con $W \neq \emptyset$ tale che*

(1) $\forall u, v \in W$, $u + v \in W$;

(2) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ e $\forall u \in W$, $\alpha u \in W$.

Allora W, con le operazioni di somma di vettori e di prodotto di scalari per vettori ereditate da V, è uno spazio vettoriale. Si dice che W è un sottospazio di V.

L'esempio 1 si può riesprimere e completare come segue. I sottospazi dello spazio vettoriale $\mathcal{G}_o^3$ sono tutti e soli i sottinsiemi di $\mathcal{G}_o^3$ dei seguenti tipi: (0) l'insieme $\{\underline{0}\}$ costituito dal solo vettore nullo; (1) ciascun insieme costituito dai vettori che stanno su una retta passante per l'origine O; (2) ciascun insieme costituito dai vettori che stanno su un piano passante per l'origine O; (3) l'insieme $\mathcal{G}_o^3$.

L'esempio 2 si può generalizzare come segue.

Proposizione 2 *Per ciascuna data una equazione lineare omogenea in n incognite x_i ($i = 1, \ldots, n$)*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0, \qquad (a_i \in \mathbb{R}),$$

il sottinsieme di $\mathbb{R}^n$ costituito dalle sue soluzioni è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$.

Dimostrazione. (1) se $(s_i)_1^n$ e $(t_i)_1^n$ sono due soluzioni dell'equazione, allora anche la loro somma $(s_i + t_i)_1^n$ è una soluzione dell'equazione (poichè da $\sum_1^n a_i s_i = 0$ e $\sum_1^n a_i t_i = 0$, sommando membro a membro, segue $\sum_1^n a_i(s_i + t_i) = 0$); (2) se $(s_i)_1^n$ è una soluzione dell'equazione, allora anche ogni suo multiplo scalare $(\alpha s_i)_1^n$ è una soluzione dell'equazione (poichè da $\sum_1^n a_i s_i = 0$, moltiplicando i due membri per α, segue $\sum_1^n a_i(\alpha s_i) = 0$.)

Dimensione. Posizione del problema

Consideriamo lo spazio vettoriale geometrico 2-dimensionale $\mathcal{G}_o^2$. La dimensione 2 di $\mathcal{G}_o^2$ si riferisce al fatto che i suoi elementi sono i vettori del piano. La dimensione 2 può anche essere descritta nei termini della struttura di $\mathcal{G}_o^2$ nel modo seguente.

In $\mathcal{G}_o^2$ c'è qualche vettore a diverso dal vettore nullo; a partire dal vettore a si possono ottenere i suoi multipli scalari αa ($\alpha \in R$). In $\mathcal{G}_o^2$ c'è qualche vettore b che non si può ottenere in questo modo; a partire dai due vettori a, b si possono ottenere le loro combinazioni lineari $\alpha a + \beta b$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$). Ora, in $\mathcal{G}_o^2$ ciascun vettore si può ottenere in questo modo. Ci siamo fermati a 2 vettori.

Ripetendo lo stesso processo in $\mathcal{G}_o^3$, ci saremmo fermati a 3 vettori.

Questi fatti suggeriscono una definzione di "dimensione" che abbia senso per uno spazio vettoriale qualsiasi. Prima di dare questa definizione, cosideriamo le relazioni che possono sussistere fra vettori, ed introduciamo le nozione di vettori "linearmente indipendenti".

Vettori linearmente indipendenti.

In $\mathbb{R}^4$ consideriamo i primi tre vettori canonici $(1, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$. Osserviamo che

(1) nessuno di questi tre vettori si può ottenere come combinazione lineare degli altri due:

$$\begin{array}{ll} (1,0,0,0) = \alpha(0,1,0,0) + \beta(0,0,1,0) & \text{impossibile} \\ (0,1,0,0) = \gamma(1,0,0,0) + \delta(0,0,1,0) & \text{impossibile} \\ (0,0,1,0) = \epsilon(1,0,0,0) + \varphi(0,1,0,0) & \text{impossibile.} \end{array}$$

(2) una combinazione lineare di questi tre vettori è uguale al vettore nullo

$$\alpha(1,0,0,0) + \beta(0,1,0,0) + \gamma(0,0,1,0) = (0,0,0,0)$$

solo se $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Considerazioni analoghe valgono per ciascuno dei sottinsiemi dell'insieme dei vettori canonici di uno spazio vettoriale standard. Più in generale, si prova che vale il seguente

Teorema 1 *Sia V uno spazio vettoriale reale. Le seguenti condizioni su una sequenza $a_1, \ldots, a_m \in V$ di vettori di V sono equivalenti:*

(1) nessuno degli m vettori a_i si può ottenere come combinazione lineare degli altri $m-1$ vettori;

(2) una combinazione lineare degli m vettori a_i è uguale al vettore nullo

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_1 a_i = \underline{0}$$

solo se $\alpha_i = 0$ per ogni $i = 1, \ldots, m$

Siamo ora pronti per dare la seguente

Definizione 2 *Sia V uno spazio vettoriale reale. Si dice che una sequenza $a_1, \ldots, a_m \in V$ di vettori di V è linearmente indipendente se soddisfa una (e dunque ciascuna) delle due condizioni del teorema. In tal caso si dice anche, in breve, che i vettori $a_1, \ldots, a_m$ sono linearmente indipendenti.*

Se una sequenza $a_1, \ldots, a_m \in V$ di vettori di uno spazio vettoriale V non è linearmente indipendente, si dice che è "linearmente dipendente". In tal caso si dice anche, in breve, che i vettori $a_1, \ldots, a_m$ sono linermente dipendenti.

Esempio. Nello spazio vettoriale $\mathcal{G}_o^3$ siano: (1) a un vettore non nullo; (2) b un vettore che non sta sulla retta di a; (3) c un vettore che non sta sul piano di a e b. Allora a, b, c sono linearmente indipendenti. Lo si può provare come segue. Consideriamo un'uguaglianza

$$\alpha a + \beta b + \gamma c = \underline{0}.$$

Osserviamo che γ deve essere $= 0$ (altrimenti si potrebbe ricavare $c = -(\alpha/\gamma)a - (\beta/\gamma)b$ contro l'ipotesi fatta su c). Si dunque un'uguaglianza

$$\alpha a + \beta b = \underline{0}.$$

Osserviamo che β deve essere $= 0$ (altrimenti si potrebbe ricavare $b = -(\alpha/\beta)a$ contro l'ipotesi fatta su b). Si dunque un'uguaglianza

$$\alpha a = \underline{0}.$$

Osserviamo che α deve essere $= 0$ (altimenti si avrebbe $a = \underline{0}$ contro l'ipotesi fatta su a).

Esempio. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ i tre vettori $(1,1,0)$, $(0,1,1)$, $(2,5,3)$ sono linearmente dipendenti. (Lo si può vedere in almeno due modi diversi. Primo: il vettore $(2,5,3)$ si può ottenere come combinazione lineare degli altri due: $(2,5,3) = 2(1,1,0) + 3(0,1,1)$. Secondo: vale l'uguaglianza $2(1,1,0) + 3(0,1,1) - 1(2,5,3) = (0,0,0)$.)

Esempio. I vettori canonici e_i $(i = 1,2,\ldots,n)$ dello spazio vettoriale $n-$dimensionale standard $\mathbb{R}^n$ sono linearmente indipendenti. (Infatti, l'uguaglianza

$$\alpha_1(1,0,\ldots,0) + \alpha_2(0,1,\ldots,0) + \alpha_n(0,0,\ldots,1) = (0,0,\ldots,0)$$

equivale all'uguaglianza

$$(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n) = (0,0,\ldots,0)$$

che vale solo per $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$.)

Esempio. Ciascuna sottosequenza della sequenza dei vettori canonici di uno spazio vettoriale reale standard è linearmente indipendente. (Lo si può provare sostanzialmente come sopra).