Lezione 10.1, Analisi, 03.10.2017

Funzioni reali di variabile reale

Funzioni polinomiali

Rette nel piano e funzioni polinomiali di I grado Sia fissato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico nel piano, e tramite di esso si identifichi l'insieme $\mathbb{R}^2$ con l'insieme dei punti del piano. Alle coppie $(0, k)$ corrispondono punti sull'asse y, e tutti i punti sull'asse y provengono da tali coppie; dunque l'asse y ha equazione $x = 0$; piu' in generale, le rette parallele all'asse y hanno equazione

$$x = h, \qquad (h \textit{ costante } \in \mathbb{R}.)$$

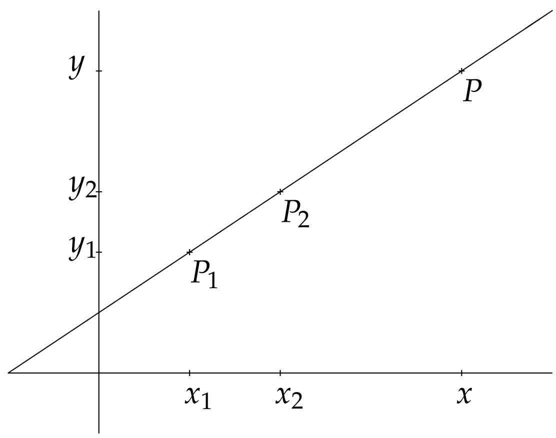
Analogamente, l'asse x ha equazione $y = 0$; piu' in generale, le rette parallele all'asse x hanno equazione

$$y = h, \qquad (h \textit{ costante } \in \mathbb{R}.)$$

Siano P_1 e P_2 due punti diversi, che non stanno su una retta parallela all'asse y; la *pendenza del segmento* P_1P_2 rispetto al sistema di riferimento e' il rapporto fra la misura con segno della proiezione del segmento orientato P_1P_2 sull'asse y e la misura con segno della proiezione del segmento orientato P_1P_2 sull'asse x. Se le coordinate dei due punti sono $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$, allora si ha che la pendenza del segmento P_1P_2 rispetto al sistema di riferimento e' data dal il rapporto dell'incremento delle seconde coordinate sull'incremento delle prime coordinate:

$$\textit{pendenza di } P_1P_2 \; = \; \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Sia r una retta non parallela all'asse y; la *pendenza della retta* r e' la pendenza di un qualsiasi segmento con estremi su r. In effetti tutti i segmenti con estremi su una stessa retta hanno la stessa pendenza, e questa proprieta' caratterizza le rette fra le altre curve.



Siano $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ due punti diversi, che non stanno su una retta parallela all'asse y, e sia r la retta passante per P_1 e P_2. Un punto $P(x, y)$ diverso da P_1 appartiene alla retta r se e solo se

$$\textit{pendenza di } P_1P \;=\; \textit{pendenza di } P_1P_2,$$

cioe'

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Da cio' segue che l'equazione della retta r per i due punti P_1 e P_2 e'

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

L'equazione della retta di pendenza m per un punto $P_0(x_0, y_0)$ e'

$$y - y_0 = m(x - x_0);$$

esplicitando la y, e mettendo assieme le costanti, si ottiene un'equazione del tipo

$$y = mx + q.$$

Questa e' l'equazione canonica della retta; ad essa corrisponde la retta di pendenza m passante per $(0, q)$.

Le rette parallele all'asse x sono i grafici delle funzioni costanti, e le rette non parallele all'asse y sono i grafici delle funzioni polinomiali di I grado. Per ogni $m, q \in \mathbb{R}$ con $m \neq 0$ la retta di equazione canonica

$$y = mx + q$$

è il grafico della funzione polinomiale

$$x \mapsto mx + q, \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Funzioni polinomiali di II grado Il grafico di una funzione polinomiale di II grado

$$p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad p(x) = ax^2 + bx + c, \qquad (a \neq 0)$$

e' una parabola con l'asse parallelo all'asse y, avente concavita' rivolta verso l'alto o il basso secondo che a sia maggiore o minore di zero.

Mostriamo di seguito un modo per riscrivere un polinomio di secondo grado in una forma che ne metta in evidenza le salienti proprieta'; questo modo consiste nel "completare il quadrato"; e' all'origine della ben nota formula per la risoluzione delle equazioni di II grado. Descriviamo questo modo di riscrittura su un esempio.

$$\begin{aligned}
p(x) &= 3x^2 + 4x + 1 \\
&= 3(x^2 + \frac{4}{3}x) + 1 \\
&= 3(x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{4}{9} - \frac{4}{9}) + 1 \\
&= 3(x + \frac{2}{3})^2 - \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

La scrittura di sopra mette in evidenza che

$$p(x) \geq -\frac{1}{3}, \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$
$$p(x) = -\frac{1}{3}, \quad \text{se e solo se} \quad x = -\frac{2}{3}.$$

Queste proprieta' della funzione si riflettono nel fatto che il suo grafico e' una parabola con concavita' rivolta verso l'alto ed avente vertice nel punto $(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$.

Ordinamento (parziale) e operazioni

Ordinamento La relazione d'ordine totale sui numeri reali induce una relazione d'ordine parziale sulle funzioni reali di variabile reale, definita "punto a punto".
Per due qualsiasi funzioni

$$f, g : A \to \mathbb{R}$$

poniamo

$$f \leq g \quad \text{se e solo se} \quad f(x) \leq g(x)\ \forall x \in A.$$

Esempi.
Per le funzioni $f, g : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$ si ha $f < g$.
Le funzioni $h, k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = x^2$, $k(x) = x^3$ non sono confrontabili.

Operazioni aritmetiche Le operazioni sui numeri reali (somma (e sottrazione), prodotto (e divisione per un numero non nullo)) inducono delle operazioni sulle funzioni a valori reali (somma (e sottrazione), prodotto (e divisione per una funzione, con i dovuti accorgimenti)); queste operazioni sulle funzioni sono definite "punto a punto".
Per due qualsiasi funzioni

$$f, g : A \to \mathbb{R}$$

definiamo la funzione somma e la funzione sottrazione ponendo

$$f + g : A \to \mathbb{R}, \qquad (f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad \forall x \in A$$
$$f - g : A \to \mathbb{R}, \qquad (f-g)(x) = f(x) - g(x), \quad \forall x \in A.$$

Definiamo la funzione prodotto $r \cdot f$ di un qualsiasi numero reale $r \in \mathbb{R}$ per una qualsiasi funzione

$$f : A \to \mathbb{R}$$

ponendo

$$r \cdot f : A \to \mathbb{R}, \qquad (r \cdot f)(x) = rf(x), \quad \forall x \in A.$$

Spesso $r \cdot f$ si scrive brevemente rf.

Per due qualsiasi funzioni

$$f, g : A \to \mathbb{R}$$

definiamo la funzione prodotto e la funzione quoziente ponendo

$$fg : A \to \mathbb{R}, \qquad (fg)(x) = f(x)g(x), \quad \forall x \in A$$
$$\frac{f}{g} : A' \to \mathbb{R}, \qquad (\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad \forall x \in A'.$$

Qui sopra A' e' l'insieme dei punti nei quali la funzione g non si annulla:

$$A' = \{x \in A : \ g(x) \neq 0\}.$$

E' utile sviluppare un minimo di sensibilita' per immaginare il grafico della funzione somma a partire di grafici delle funzioni addendi, oppure il grafico della funzione prodotto a partire di grafici delle funzioni fattori, A questo scopo, utilizzando l'on-line algebra calculator di maxima: (1) si rappresentino i grafici delle funzioni

$$f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x, \quad g(x) = 2^x$$

e della loro funzione somma

$$f + g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (f+g)(x) = x + 2^x.$$

(2) si rappresentino i grafici delle funzioni

$$f, g : [1, +\infty[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x}, \quad g(x) = \sin(\pi x)$$

e della loro funzione prodotto

$$fg : [1, +\infty[\to \mathbb{R}, \quad (fg)(x) = \frac{\sin(\pi x)}{x}.$$

Composizione Di regola, si considerano funzioni $f : A \to \mathbb{R}$ con dominio un sottinsieme $A \subseteq \mathbb{R}$ e codominio tutto $\mathbb{R}$, e si restringe il codominio solo quando si intende invertire la funzione; l'insieme delle immagini degli elementi di A si dice "immagine di A" e si indica con $f(A)$, in simboli $f(A) = \{f(x) | \ x \in A\}$. Date due funzioni

$$f : A \to \mathbb{R}, \quad g : B \to \mathbb{R},$$

con $f(A) \subseteq B$, si ha una funzione

$$g \circ f : \ A \to \mathbb{R}, \qquad (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

detta "funzione composta g dopo f," in breve "g composta f."

La funzione con dominio e codominio $\mathbb{R}$ che associa ad ogni elemento l'elemento stesso si dice "funzione identità su $\mathbb{R}$ e si scrive $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$; in breve si dice "identità" e si scrive id. Questa funzione è caratterizzata dalla proprietà

$$f \circ \mathrm{id} = f = \mathrm{id} \circ f, \qquad \forall f : A \to \mathbb{R}$$

La composizione di funzioni è un'operazione associativa ma non commutativa.

Esempio. Per le funzioni

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = -x^2 \\ g &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = e^x \end{aligned}$$

si ha

$$\begin{aligned} g \circ f &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad (g \circ f)(x) = g(f(x)) = e^{-x^2} \\ f \circ g &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad (f \circ g)(x) = f(g(x)) = -(e^x)^2 = -e^{2x}, \end{aligned}$$

e $g \circ f \neq f \circ g$.

Qualche altra funzione

Funzione valore assoluto. È la funzione $v : \mathbb{R} \to R$,

$$v(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases};$$

il grafico di f è l'unione dei grafici delle funzioni $v_{\geq 0} : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$, $v_{\geq 0}(x) = x$ e $v_{\leq 0} : \mathbb{R}_{\leq 0} \to \mathbb{R}$, $v_{\leq 0}(x) = -x$, cioè delle semirette $(y = x, \quad x \geq 0)$ e $(y = -x, \quad x \leq 0)$.

Funzione segno. È la funzione $s : \mathbb{R}_{\neq 0} \to R$,

$$s(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases};$$

il grafico di f è l'unione delle semirette $(y = 1, \quad x > 0)$ e $(y = -1, \quad x < 0)$.

Un poco più in generale, per due funzioni $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ e $g : [b, c] \to \mathbb{R}$ definte su intervalli adiacenti e disgiunti, si ha una funzione $h : [a, c] \to \mathbb{R}$ definita sull'unione degli intervalli ponendo

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in [a, b[\\ g(x) & \text{se } x \in [b, c] \end{cases};$$

il grafico di h è l'unione dei grafici di f e g.