Lezione 10.2, Algebra lineare, 03.10.2017

Spazi vettoriali

Spazio vettoriale $\mathbb{R}^\infty$ Una successione di numeri reali è una sequenza infinita di numeri reali $a_i \in \mathbb{R}$; due successioni $a = (a_1, a_2, \dots) = (a_i)_1^\infty$ e $b = (b_1, b_2, \dots) = (b_i)_1^\infty$ si dicono uguali se sono uguali componente per componente, $a_i = b_i$ per ogni $i = 1, 2, \dots$; l'insieme di queste successioni si indica con $\mathbb{R}^\infty$.
Si definisce la somma di due successioni $a = (a_i)_1^\infty$ e $b = (b_i)_1^\infty$ come la successione $a + b = (a_i + b_i)_1^\infty$. Si definisce il prodotto di uno scalare α per una successione $a = (a_i)_1^\infty$ come la successione $\alpha a = (\alpha a_i)_1^\infty$.
L'insieme $\mathbb{R}^\infty$ delle successioni di numeri reali, munito di queste operazioni, è uno spazio vettoriale.

Dimensione

Sequenze linearmente indipendenti massimali

Definizione 1 *Una sequenza $v_1, \dots, v_m$ di vettori v_i di uno spazio vettoriale V si dice linearmente indipendente massimale se*

(1) la sequenza $v_1, \dots, v_m$ è linearmente indipendente;

(2) $\forall v \in V$, la sequenza $v_1, \dots, v_m, v$ è linearmente dipendente.

Esempio 1. Nello spazio vettoriale 3-dimensionale geometrico $\mathcal{G}_o^3$, sia u, v una sequenza di 2 vettori tali che u non sia il vettore nullo e v non stia sulla retta di u; la sequenza u, v è linearmente indipendente, ma non è massimale; infatti, esiste un vettore w (uno qualsiasi che non sta sul piano di u e v) tale che la sequenza u, v, w sia ancora linearmente indipendente.
La sequenza u, v, w è linearmente indipendente massimale; infatti, per ogni vettore $z \in \mathcal{G}_o^3$ si ha che la sequenza u, v, w, z è linearmente dipendente (z si può ottenere come combinazione lineare di u, v, w).

Esempio 2. Nello spazio vettoriale 3-dimensionale standard $\mathbb{R}^3$, la sequenza $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ è linearmente indipendente, ma non è massimale; infatti, è contenuta nella sequenza $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ che è ancora linearmente indipendente.
La sequenza $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ è linearmente indipendente massimale; infatti, per ogni vettore $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ si ha che la sequenza $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (a, b, c)$ è linearmente dipendente ((a, b, c) si può ottenere come combinazione lineare di $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$)

Esempio 3. Nello spazio vettoriale 3-dimensionale standard $\mathbb{R}^3$, la sequenza $(1, 2, 3)$, $(0, 5, 6)$, $(0, 0, 9)$ è linearmente indipendente massimale; infatti: $(1, 2, 3)$, $(0, 5, 6)$, $(0, 0, 9)$ è linearmente indipendente e per ogni $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ si ha che la sequenza

$(1,2,3)$, $(0,5,6)$, $(0,0,9)$, (a,b,c) è linearmente dipendente ((a,b,c) si può ottenere come combinazione lineare di $(1,2,3)$, $(0,5,6)$, $(0,0,9)$)

Esempio 4. Nello spazio vettoriale n-dimensionale standard $\mathbb{R}^n$, la sequenza degli n vettori canonici $e_1 = (1,0,0,\ldots,0)$, $e_2 = (0,1,0,\ldots,0)$, ... $e_n = (0,0,0,\ldots,1)$, è linearmente indipendente massimale.

Esempio 5. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^\infty$, si può provare che non esiste alcuna sequenza finita linearmente indipendente massimale.

Dimensione. Approfondendo questi esempi ed altri analoghi, si può vedere che: ogni sequenza linearmente indipendete massimale in $\mathcal{G}_o^2$ è costituita da 2 vettori; ogni sequenza linearmente indipendete massimale in $\mathcal{G}_o^3$ è costituita da 3 vettori. Si può avere inoltre l'impressione che ogni sequenza linearmente indipendete massimale in $\mathbb{R}^n$ è costituita da n vettori. Così è. Di più, si può dimostrare il seguente

Teorema 1 *Sia V uno spazio vettoriale. Se esiste una sequenza finita linearmente indipendente massimale in V, allora: (1) ogni sequenza linearmente indipendente in V è contenuta in una sequenza finita linearmente indipendente massimale in V; (2) tutte le sequenza linearmente indipendenti massimali in V sono formate dallo stesso numero di vettori.*

Questo teorema permette di dare la seguente definzione.

Definizione 2 *Sia V uno spazio vettoriale. Se esiste una sequenza finita linermente indipendente massimale di vettori di V, il numero dei vettori di una tale sequenza si dice dimensione dello spazio vettoriale V, e si indica con* $\dim(V)$*. Se non esiste alcuna sequenza finita linearmente indipendente massimale in V, allora si dice che V ha dimensione infinita*

La nozione generale di dimensione estende la nozione informale elementare di dimensione, e si ha

$$\dim(\mathcal{G}_o^2) = 2,\ \dim(\mathcal{G}_o^3) = 3,\ \dim\mathbb{R}^n = n.$$

Soluzioni di un'equazione lineare Consideriamo l'equazione lineare

$$x + 2y + 3z = 0$$

nelle incognite x, y, z, ed indichiamo con $S \subset \mathbb{R}^3$ l'insieme delle sue soluzioni. Si può risolvere questa equazione esplicitando la x in funzione di y e z, e lasciando y e z libere di assumere qualsiasi valore in $\mathbb{R}$:

$$x = -2y - 3z, \quad y = \text{ qualsiasi } z = \text{ qualsiasi.}$$

La soluzione generale dell'equazione è data da

$$(-2y - 3z, y, z) = y(-2,1,0) + z(-3,0,1),$$

dove y, z variano liberamente in $\mathbb{R}$. Osserviamo che la sequenza $(-2,1,0),(-3,0,1)$ è linearmente indipendente massimale in S (infatti, $(-2,1,0),(-3,0,1)$ sono linearmente indipendenti, ed ogni vettore in S è loro combinazione lineare. Dunque $\dim(S) = 2$.

In generale, si ha

Proposizione 1 *Sia data un'equazione lineare omogenea*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$$

nelle n incognite x_i, nella quale qualche coefficiente a_i sia diverso da 0, e sia $S \subseteq \mathbb{R}^n$ lo spazio vettoriale delle sue soluzioni Allora

$$\dim(S) = n - 1.$$

Più in generale, si ha che l'insieme delle soluzioni di un sistema di equazioni lineari omogenee è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$; e si ha un teorema sulla dimensione di un tale spazio.