Lezione 11, Analisi, 04.10.2017

Limiti

Il concetto di limite ha una lunga storia; alcune tappe: gli antichi greci in particolare con Eudosso e Archimede immaginarono ed usarono un "principio di esaustione" per determinare lunghezze, aree e volumi di figure geometriche; Newton e Leibniz nel XVII secolo usarono una forma del concetto di limite per fondare il calcolo infintesimale e integrale; Cauchy nel IXX secolo diede una definizione rigorosa del concetto di limite, sostanzialmente la stessa definizione ancora oggi usata. Il concetto di limite e' fondamentale per tutta l'analisi matematica, per buona parte della matematica in generale, e per le sue applicazioni.

Noi considereremo i limiti di una funzione $f(x)$ reale di variabile reale, prima per x che tende a $+\infty$ e $-\infty$ e poi per x che tende a un numero reale. Spesso penseremo la funzione come la legge oraria del moto di un punto materiale su una retta, penseremo cioe' $f(x)$ come la coordinata sulla retta del punto in cui si trova il punto materiale all'istante x.

I grafici delle funzioni possono essere visualizzati su

`http://maxima-online.org/index.html`

Limiti a $+\infty$

Esempi

Lo stile di questa premessa è volutamente informale. Data una funzione $f(x)$ definita per ogni x abbastanza grande, è naturale studiare il comportamento di $f(x)$ per x via via più grande.

Esempio 1 Consideriamo la funzione

$$f : A \to \mathbb{R}, \quad A =]-\frac{3}{2}, +\infty[; \qquad f(x) = \frac{4x+5}{2x+3}$$

Per x via via più grande si ha che i contributi di 5 al numeratore e di 3 al denominatore diventano via via trascurabili, cosè che il valore di $(4x+5)/(2x+3)$ diventa via via vicino al valore di $4x/(2x) = 2$. Viene da dire che per x che tende a $+\infty$ il valore $f(x)$ tende al limite 2.

Esempio 2. Consideriamo la funzione

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad g(x) = 2^x$$

Per x via via più grande la funzione assume valori arbitrariamente grandi. Viene da dire che per x che tende a $+\infty$ il valore $g(x) = 2^x$ tende al limite $+\infty$.

Esempio 3 Consideriamo la funzione

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad h(x) = \sin(x)$$

Per x via via più grande la funzione assume periodicamente tutti i valori fra -1 ed 1. Viene da dire che per x che tende a $+\infty$ il valore $h(x) = \sin(x)$ non tende ad alcun limite.

Esempio 4 Consideriamo la funzione

$$k : A \to \mathbb{R}, \quad A =]-\infty, 1] \qquad k(x) = \sqrt{1-x}.$$

Nel dominio della funzione non esistono valori di x arbitrariamente grandi. Viene da dire che per x che tende a $+\infty$ non ha senso considerare il limite di $k(x) = \sqrt{1-x}$.

Nozioni

Valore assoluto Fissati su una retta un primo ed un diverso secondo punto, consideriamo l'identificazione dei numeri reali con punti sulla retta nella quale il numero 0 e il numero 1 sono identificati col primo punto e col secondo punto. Usiamo i termini "numero reale" e "punto" come sinonimi, e diciamo in breve "punto a" al posto di "punto di ordinata a". Assunto come unità di misura il segmento di estremi 0 e 1, si ha che

$$\text{distanza fra } a \text{ e } 0 = \text{ valore assoluto di } a = |a|.$$

La funzione valore assoluto possiede le seguenti proprietà rispetto alle operazioni sui numeri reali: $\forall a, b \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} &|a+b| \leq |a| + |b| \\ &|ab| = |a||b| \end{aligned}$$

Il valore assoluto è particolarmente utile per descrivere la distanza fra due punti: $\forall a, b \in \mathbb{R}$ si ha

$$\text{distanza fra } a \text{ e } b \ = |a-b|.$$

Intorni Dato un punto c ed un numero reale positivo $r > 0$, diciamo "intorno di centro c e raggio r" e scriviamo $I_c(r)$ per indicare l'insieme dei punti della retta che distano da c per meno di r; in simboli:

$$I_c(r) = \{x \in \mathbb{R} : \ |x-c| < r\}.$$

Questo insieme è un intervallo, precisamente:

$$I_c(r) =]c-r, c+r[.$$

diciamo "un intorno di centro c" e scriviamo I_c per indicare un intorno di centro c e non specificato raggio.

Insiemi superiormente illimitati Diciamo che un sottinsieme $A \subseteq \mathbb{R}$ è "superiormente illimitato" se per ogni punto sulla retta esiste un punto di A che lo segue in senso stretto; precisando, e in simboli:

$$\forall K(>0) \quad \exists a \in A: \quad k < a.$$

Definizione. Limite finito a più infinito

Definizione 1 *Siano date una funzione $f : A \to \mathbb{R}$, con A superiormente illimitato, ed un numero reale $\ell \in \mathbb{R}$. Si dice che $f(x)$ tende a ℓ per x che tende a $+\infty$, e si scrive*

$$f(x) \to \ell \quad per \quad x \to +\infty$$

se per ogni intorno I_ℓ del punto ℓ esiste un numero reale M tale che $f(x) \in I_\ell$, per ogni $x \in A$ con $x > M$. In breve: se

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists M \in \mathbb{R}: \quad (|f(x) - \ell| < \epsilon, \, \forall x \in A \ \ con\ x > M).$$

Si dice anche che il limite di $f(x)$ per x che tende a $+\infty$ è ℓ, e si scrive

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell.$$

Il numero reale M che compare nella definizione dipende da ϵ; spesso si sottolinea questa dipendenza scrivedo M_r al posto di M.

Se la funzione $f(x)$ viene riguardata come la legge del moto di un punto materiale P su una retta, allora la definizione di sopra può essere riguardata nel modo seguente: il limite del punto P per il tempo che tende a $+\infty$ e' ℓ se e solo se per ogni intorno I_ℓ di ℓ esiste un istante a partire dal quale il punto P sta definitivamente in I_ℓ.

Esempio 1. Consideriamo di nuovo la funzione

$$f(x) = \frac{4x+5}{2x+3}, \qquad x \in]-\frac{3}{2}, +\infty[$$

e verifichiamo che

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{4x+5}{2x+3} = 2.$$

Dobbiamo verificare che per ogni $\epsilon > 0$ esiste un $M = M_\epsilon \in \mathbb{R}$ tale che la disequazione nella incognita x

$$\left| \frac{4x+5}{2x+3} - 2 \right| < \epsilon$$

sia soddisfatta per ogni $x \in]-\frac{3}{2}, +\infty[$ con $x > M$. Svolgendo i calcoli dentro il valore assoluto la disequazione diviene

$$\left| \frac{-1}{2x+3} \right| < \epsilon;$$

sotto la condizione $x > -\frac{3}{2}$, questa disequazione ha soluzione

$$x > \frac{1}{2}(\frac{1}{\epsilon} - 3).$$

Basta dunque prendere $M_\epsilon = \frac{1}{2}(\frac{1}{\epsilon} - 3)$.

Definizione. Limite infinito a più infinito

Definizione 2 *Sia data una funzione $f : A \to \mathbb{R}$, con A superiormente illimitato. Si dice che $f(x)$ tende a $+\infty$ per x che tende a $+\infty$, e si scrive*

$$f(x) \to +\infty \quad \textit{per} \quad x \to +\infty$$

se

$$\forall H \in \mathbb{R} \;\; \exists M \in \mathbb{R} : \quad (f(x) > H, \; \forall x \in A \;\; \textit{con} \; x > M).$$

Si dice anche che il limite di $f(x)$ per x che tende a $+\infty$ è $+\infty$, e si scrive

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Interessano i valori di H "grandi", in particolare si può sempre supporre $H > 0$. Il numero reale M che compare nella definizione dipende da H; spesso si sottolinea questa dipendenza scrivedo M_H al posto di M.

Se la funzione $f(x)$ viene riguardata come la legge del moto di un punto materiale P su una retta, allora la definizione di sopra può essere riguardata nel modo seguente: il limite del punto P per il tempo che tende a $+\infty$ è $+\infty$ se e solo se per ogni punto H esiste un istante a partire dal quale il punto P supera definitivamente il punto H.

Analogamente si dà la

Definizione 3 *Sia data una funzione $f : A \to \mathbb{R}$, con A superiormente illimitato. Si dice che $f(x)$ tende a $-\infty$ per x che tende a $+\infty$, e si scrive*

$$f(x) \to +\infty \quad \textit{per} \quad x \to +\infty$$

se

$$\forall H \in \mathbb{R} \;\; \exists M \in \mathbb{R} : \quad (f(x) < H, \; \forall x \in A \;\; \textit{con} \; x > M).$$

Si dice anche che il limite di $f(x)$ per x che tende a $+\infty$ è $-\infty$, e si scrive

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty.$$

Interessano i valori di H negativi e "grandi" in valore assoluto, in particolare si può sempre supporre $H < 0$.

Esempio 2. Consideriamo di nuovo la funzione

$$g(x) = 2^x, \qquad x \in \mathbb{R}$$

e verifichiamo che

$$\lim_{x\to+\infty} 2^x = +\infty.$$

Basta osservare che per ogni $H > 0$ la disequazione

$$2^x > H$$

è equivalente alla disequazione

$$x > \log_2 H.$$

e porre $M_H = \log_2 H$.

Definizione. Limite finito per eccesso/difetto a più infinito

Intorni superiori Dato un punto c ed un numero reale positivo $r > 0$, diciamo "intorno superiore di c di raggio r" e scriviamo $I_{c,+}(r)$ per indicare l'insieme dei punti della retta che seguono c e distano da c per meno di r; in simboli:

$$I_{c,+}(r) = \{x \in \mathbb{R} : \ x \geq c \text{ e } |x - c| < r\}.$$

Questo insieme è un intervallo, precisamente:

$$I_{c,+}(r) = [c, c + r[.$$

Diciamo "un intorno superiore di c" e scriviamo $I_{c,+}$ per indicare un intorno superiore di c di non specificato raggio. Analogamente si dà la nozione di "intorno inferiore di c di raggio r."

Definizione 4 *Siano date una funzione $f : A \to \mathbb{R}$, con A superiormente illimitato, e un numero reale $\ell \in \mathbb{R}$. Si dice che $f(x)$ tende per eccesso a ℓ per x che tende a $+\infty$, e si scrive*

$$f(x) \to \ell^+ \quad \textit{per} \quad x \to +\infty$$

se

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists M \in \mathbb{R} : \quad (\ell \leq f(x) < \ell + \epsilon, \ \forall x \in A \ \textit{ con } x > M).$$

Si dice anche che il limite di $f(x)$ per x che tende a $+\infty$ è ℓ^+, e si scrive

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell^+.$$

Analogamente si definisce la nozione di limite per difetto, con la relativa notazione

$$f(x) \to \ell^- \quad \text{per} \quad x \to +\infty \qquad \text{o} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell^-.$$

Esempio 1. Si verifica che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{4x+5}{2x+3} = 2^-.$$

Esempio 5. Si verifica che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0, \quad \text{ma non } 0^+ \quad \text{nè } 0^-.$$

Definizione. Limiti a meno infinito

Abbiamo definito cinque tipi di limiti ($+\infty$, ℓ^+, ℓ, ℓ^-, $-\infty$ con $\ell \in \mathbb{R}$) per $x \to +\infty$. A ciascuno di questi corrisponde un tipo di limite per $x \to -\infty$. Ad esempio:

Definizione 5 *Siano date una funzione $f : A \to \mathbb{R}$, con A inferiormente illimitato, ed un numero reale $\ell \in \mathbb{R}$. Si dice che $f(x)$ tende a ℓ per x che tende a $-\infty$, e si scrive*

$$f(x) \to \ell \quad \textit{per} \quad x \to -\infty$$

se per ogni intorno I_ℓ del punto ℓ esiste un numero reale M tale che $f(x) \in I_\ell$, per ogni $x \in A$ con $x < M$. In breve: se

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists M \in \mathbb{R} : \quad (|f(x) - \ell| < \epsilon, \; \forall x \in A \;\; \textit{con} \; x < M).$$

Si dice anche che il limite di $f(x)$ per x che tende a $-\infty$ è ℓ, e si scrive

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell.$$