Lezione 12, Algebra lineare, 04.10.2017

Algebra delle matrici

Prodotto di matrici

Vettori riga e vettori colonna. È utile poter considerare, accanto a ennuple ordinate di numeri reali $(a_1, \dots, a_n)$, anche righe di numeri reali, oppure colonne di numeri reali

$$[b_1 \; \dots \; b_m], \qquad \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_p \end{bmatrix}.$$

L'insieme delle righe di n numeri reali e l'insieme delle colonne di n numeri reali vengono denotati rispettivamente con $R^{1\times n}$ e $\mathbb{R}^{n\times 1}$. Su ciascuno di questi insiemi si definiscono, in stretta analogia con $\mathbb{R}^n$, un'operazione di somma ed una operazione di moltiplicazione per numeri reali, che conferiscono a ciascuno di essi la struttura di spazio vettoriale reale. Così come le ennuple di numeri reali vengono dette vettori, le righe e le colonne di numeri reali vengono dette rispettivamente "vettori riga" e "vettori colonna".

Prodotto righe per colonne Definiamo il prodotto di un vettore riga per un vettore colonna, aventi lo stesso numero di componenti, come il numero reale ottenuto moltiplicando ciascuna componente del primo vettore per la corrispondente componente del secondo, e poi sommando. La moltiplicazione di una riga per una colonna aventi diversi numeri di componenti non viene definita. Ad esempio

$$[2\;3\;4] \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} = 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 + 4 \cdot 7 = 56$$

$$[2\;3] \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} \qquad \text{non definito}$$

In generale, per ogni $a \in \mathbb{R}^{1\times n}$ ed ogni $b \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ si definisce $ab \in \mathbb{R}$ ponendo

$$ab = [a_1 \; a_2 \; \dots \; a_n] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = \sum_{j=1}^{n} a_j b_j.$$

Il prodotto di vettori riga per vettori colonna è legato alle operazioni sui vettori riga e sui vettori colonna dalle seguenti proprietà. Per ogni due vettori riga $a, b \in \mathbb{R}^{1\times n}$, ogni due vettori colonna $c, d \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ (aventi lo stesso numero di componenti), ogni scalare $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} (a+b)c &= ab + ac \\ a(c+d) &= ac + ad \\ (\alpha a)b &= a(\alpha b) = \alpha(ab) \end{aligned}$$

Matrici Siano m ed n due interi positivi fissati. Una matrice di tipo $m \times n$ su $\mathbb{R}$ e' una tabella di $m \cdot n$ numeri reali disposti su m righe ed n colonne; l'elemento della $i-$ma riga e $j-$ma colonna di una matrice si dice in breve "elemento di posto (i, j)" della matrice. Le matrici di solito vengono indicate con lettere maiuscole; per indicare che una matrice A ha tipo $m \times n$ si usa scrivere $\underset{m\times n}{A}$. L'insieme delle matrici di tipo $m \times n$ su $\mathbb{R}$ si indica con

$$\mathbb{R}^{m\times n}.$$

La generica matrice A di tipo $m \times n$ viene solitamente rappresentata

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

oppure, piu' brevemente,

$$A = \left[a_{ij}\right]_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}},$$

o $A = \left[a_{ij}\right]$ quando il tipo e' chiaro dal contesto. Si noti che i e j non hanno alcun particolare significato, potrebbero essere sostituiti da altri due simboli, come h e k.

Noi useremo talvolta una notazione un po' diversa, suggerita dai linguaggi di alcune applicazioni per il calcolo come Matlab e Octave. Una volta scelto un simbolo, nel nostro caso A, per indicare una matrice, useremo il simbolo A_{ij} per indicare l'elemento di posto (i, j) in A; inoltre, useremo i simboli $A_{i\,:}$ e $A_{:\,j}$ per indicare rispettivamente la riga $i-$ma e la colonna $j-$ma di A.

Ad esempio, per

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix},$$

si ha:

$$A_{23} = 7, \qquad A_{2\,:} = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}, \qquad A_{:\,3} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

Prodotto di matrici Se il numero delle colonne di una matrice A e' uguale al numero delle righe di una matrice B, allora possiamo moltiplicare ciascuna riga di A per ciascuna colonna di B, ed organizzare questi prodotti in una tabella; otteniamo cosi' una matrice detta matrice prodotto (righe per colonne) di A per B, ed indicata con AB. Ad esempio, si ha

$$\left[\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline 5 & 6 \\ \hline 7 & 8 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 1\cdot 1+2\cdot 4 & 1\cdot 2+2\cdot 5 & 1\cdot 3+2\cdot 6 \\ 3\cdot 1+4\cdot 4 & 3\cdot 2+4\cdot 5 & 3\cdot 3+4\cdot 6 \\ 5\cdot 1+6\cdot 4 & 5\cdot 2+6\cdot 5 & 5\cdot 3+6\cdot 6 \\ 7\cdot 1+8\cdot 4 & 7\cdot 2+8\cdot 5 & 7\cdot 3+8\cdot 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9 & 12 & 15 \\ 19 & 26 & 33 \\ 29 & 40 & 51 \\ 39 & 54 & 69 \end{bmatrix}$$

In simboli, il prodotto di una matrice A di tipo $m \times n$ per una matrice B di tipo $n \times p$ e' la matrice AB di tipo $m \times p$

$$\underset{m\times n}{A} \cdot \underset{n\times p}{B} = \underset{m\times p}{AB}$$

data dalla tabella dei prodotti delle m righe di A per le p colonne di B : l'elemento di posto (i, j) in AB e' dato dal prodotto della riga $i-$ma di A per la colonna $j-$ma di B :

$$(AB)_{ij} = A_{i\,:}B_{:\,j}, \qquad i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, p.$$

Con riferimento agli elementi, si ha

$$\begin{aligned} (AB)_{ij} &= A_{i\,:}B_{:\,j} \\ &= [A_{i1}\ A_{i2}\ \ldots\ A_{in}] \begin{bmatrix} B_{1j} \\ B_{2j} \\ \vdots \\ B_{nj} \end{bmatrix} \\ &= A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \cdots + A_{in}B_{nj} \\ &= \sum_{h=1}^{n} A_{ih}B_{hj}. \end{aligned}$$

Nella notazione usuale, la definizione di prodotto e' la seguente: per $A = [a_{ij}]_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}$ e $B = [b_{ij}]_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,p}}$ si pone $AB = C$, dove $C = [c_{ij}]_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,p}}$ e' data da

$$c_{ij} = \sum_{h=1}^{n} a_{i,h}b_{h,j}.$$

La moltiplicazione di matrici estende la moltiplicazione dei numeri reali, nel senso che le matrici di tipo $1 \cdot 1$ sono numeri reali, e la moltiplicazione di matrici di tipo $1 \cdot 1$ e' la moltiplicazione di numeri reali.

Matrici unità. Le matrici quadrate che hanno 1 sulla diagonale discendente e 0 altrove svolgono il ruolo del numero 1, e per questa ragione vengono dette "matrici unità". Esplicitamente, queste matrici sono

$$I_1 = [1], \qquad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \ldots;$$

la matrice I_n unità di ordine n è la matrice quadrata di ordine n data da

$$(I_n)_{ij} = \begin{cases} 1 & se\ i = j \\ 0 & se\ i \neq j \end{cases} \qquad \forall i, j = 1, \ldots, n.$$

La proprietà di queste matrici è che

$$I_m A = A = A I_n,$$

per ogni m, n e per ogni matrice A di tipo $m \times n$.

Verifichiamo la prima parte di questa proprieta' per $m = 2$ e $n = 3$. Per ogni matrice

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

di tipo 2×3 si ha

$$\begin{aligned} I_2 A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1a + 0d & 1b + 0e & 1c + 0f \\ 0a + 1d & 0b + 1e & 0c + 1f \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} = A. \end{aligned}$$

Associatività Date tre matrici A, B, C di tipi rispettivamente $m \times n, n \times p, p \times q$, abbiamo due modi di moltiplicarle per ottenere una matrice, che sarà di tipo $m \times q$:

$$(AB)C, \qquad A(BC).$$

Ad esempio, per $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$, e $C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, si ha

$$\begin{aligned} (AB)C &= \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 15 \end{bmatrix} \\ A(BC) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} [5] = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 15 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Quello che abbiamo visto su questo esempio vale in generale. La moltiplicazione di matrici possiede la proprietà associativa: comunque siano date tre matrici A, B, C di tipi rispettivamente $m \times n, n \times p, p \times q$, si ha

$$(AB)C = A(BC).$$

Potremo così scrivere un prodotto di più matrici senza usare parentesi. Gli elementi

$$(ABC)_{ij}, \qquad i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, q,$$

della matrice ABC sono dati da

$$(ABC)_{ij} = \sum_{\substack{h=1,\ldots,n \\ k=1,\ldots,p}} A_{ih} B_{hk} C_{kj}.$$

Non commutatività Sappiamo che il prodotto di due numeri reali non cambia invertendo l'ordine dei fattori, cioè la moltiplicazione di numeri reali possiede la proprietà commutativa. Questa proprietà non vale per la moltiplicazione di matrici, anzi in generale ci si aspetta che

$$AB \neq BA.$$

Matrici invertibili, matrice inversa

Per $n = 1$, l'insieme $\mathbb{R}^{n \times n}$ delle matrici quadrate di ordine n diventa l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali, e la moltiplicazione di matrici diventa la moltiplicazione di numeri reali. In $\mathbb{R}$, il numero 1 è caratterizzato dalla proprietà che il prodotto di 1 per un qualsiasi altro numero reale è uguale a quell'altro numero reale:

$1\,a = a = a\,1, \qquad \forall a \in \mathbb{R}.$

L'inverso a^{-1} di un numero reale non nullo a è caratterizzato dalla proprietà che il prodotto del numero reale per il suo inverso è uguale a 1:

$a\,a^{-1} = 1 = a^{-1}\,a.$

Definizione 1 *Si dice che una matrice A quadrata di ordine n è invertibile se e solo se esiste una matrice B quadrata di ordine n tale che*

$$AB = I_n = BA;$$

in tal caso si dice che B è una inversa di A.

Si prova che se se A possiede un'inversa, questa è unica; essa viene detta *la* matrice inversa di A, e viene denotata con

$$A^{-1}.$$

Esempi.

Chiedersi se la matrice
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$
è invertibile significa chiedersi se esiste una matrice
$$\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$$
tale che
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{1}$$
$$\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{2}$$
Consideriamo la (1). Svolgendo il prodotto si ha
$$\begin{bmatrix} p+r & q+s \\ p-r & q-s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$
cioè
$$\begin{cases} p+r=1 \\ p-r=0 \\ q+s=0 \\ q-s=1 \end{cases};$$
questo sistema di equazioni ha una ed una sola soluzione:
$$p=q=r=\frac{1}{2},\ s=-\frac{1}{2};$$
c'è una ed una sola matrice che soddisfa la (1), ed è
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$
Si verifica che questa matrice soddisfa anche la (2).
Dunque la matrice data è invertibile e
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$
Chiedersi se la matrice
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$
è invertibile significa chedersi se esiste una matrice
$$\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$$

tale che

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Consideriamo la (3). Svolgendo il prodotto ed uguagliando componente per componente si ha il sistema

$$\begin{cases} p + 2r = 1 \\ 3p + 6r = 0 \\ q + 2s = 0 \\ 2q + 6s = 1 \end{cases};$$

la seconda e la terza equazione di questo sistema sono incompatibili; non esiste alcuna matrice che soddisfi la (3).
La matrice data non è invertibile.

Si osserva che le righe (e le colonne) della matrice invertibile sono linearmente indipendenti, e che le righe (e le colonne) della matrice non invertibile sono linearmente dipendenti. Non è un caso. Si può provare che vale il seguente

Teorema 1 *Per una matrice A di tipo $n \times n$, le seguenti proprietà sono equivalenti:*

(1) le n righe di A sono linearmente indipendenti;

(2) A è invertibile;

(3) le n colonne di A sono linearmente indipendenti.

Somma di matrici

Siano m ed n due interi positivi fissati. Date due matrici A, B di tipo $m \times n$, sommando a ciascun elemento di A il corrispondente elemento di B, si ottiene una nuova matrice di tipo $m \times n$, detta matrice somma di A e B ed indicata con $A + B$.
Esempio:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \\ 16 & 32 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 12 \\ 21 & 38 \end{bmatrix}.$$

In simboli, la matrice $A + B$ e' definita elemento per elemento ponendo

$$(A + B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}, \qquad i = 1, \dots, m, \ j = 1, \dots, n.$$

La somma di due matrici di tipi diversi non e' definita.

La somma di matrici e' un'operazione associativa e commutativa. La matrice di tipo $m \times n$ avente tutti gli elementi nulli viene detta matrice nulla ed indicata con $\underset{m\times n}{0}$. Questa matrice e' caratterizzata dalla proprieta'

$$A + \underset{m\times n}{0} = A = \underset{m\times n}{0} + A, \qquad (per\ ogni\ A \in R^{m\times n}).$$

Per ogni matrice A di tipo $m \times n$, prendendo di ciascun elemento di A il suo opposto, si ottiene una nuova matrice di tipo $m \times n$, detta matrice opposta di A ed indicata con $-A$. In simboli, la matrice $-A$ e' definita elemento per elemento ponendo

$$(-A)_{ij} = -A_{ij}, \qquad i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n.$$

Questa matrice e' caratterizzata dalla proprieta'

$$A + (-A) = \underset{m\times n}{0} = (-A) + A.$$

Nel caso $m = n = 1$ si ha l'usuale somma di numeri reali.

L'operazione di moltiplicazione di matrici possiede le proprieta' distributive sinistra e destra rispetto all'addizione di matrici:

$$\begin{aligned} (A + B)C &= AC + BC \\ B(C + D) &= BC + BD \end{aligned}$$

per ogni A, B matrici di tipo $m \times n$ e C, D matrici di tipo $n \times p$.