Lezione 16; Analisi, 10.10.2017

1 Limiti

Limiti al finito

Date una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ e un punto $c \in \mathbb{R}$ "vicino" ad A, si intende studiare $f(x)$ per x "vicino" a c ma diverso da c.

Definizione 1 *Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$. Si dice che c è un punto di accumulazione per A se ogni intorno $]c-r, c+r[$ di c contiene almeno un $a \in A$ diverso da c.*

Esempi.

(1) Consideriamo l'intervallo $[0,1[\subset R$. Il punto 1 è di accumulazione per $[0,1[$ in quanto ogni intorno $]1-r, 1+r[$ di centro 1 contiene qualche punto di $[0,1[$ (diverso da 1); Ciascun punto $c \in [0,1[$ è di accumulazione per $[0,1[$ in quanto ... Ciascun punto $c < 0$ non è di accumulazione per $[0,1[$ in quanto esiste un intorno di c, ad esempio quello di raggio $|c|/2$, che non contiene alcun punto di $[0,1[$ (diverso da c). Ciascun punto $c > 1$ non è di accumulazione per $[0,1[$ ...

(2) Consideriamo l'insieme $\{0,1\}$ che ha per elementi solo i punti 0 e 1. Il punto 0 non è di accumulazione per l'insieme $\{0,1\}$ in quanto esiste un intorno di 0, ad esempio quello di raggio $1/2$, che non contiene alcun punto di $\{0,1\}$ diverso da 0. Ciascun punto di $\mathbb{R}$ non è di accumulazione per $\{0,1\}$ in quanto ...

Definizione 2 *Siano date: una funzione $f : A \to \mathbb{R}$, un punto $c \in \mathbb{R}$ di accumulazione per A, e un punto $\ell \in \mathbb{R}$. Si dice che $f(x)$ tende ad ℓ per x che tende a c, e si scrive*

$$f(x) \to \ell \quad \text{per } x \to c,$$

se per ogni intorno $]\ell-\epsilon, \ell+\epsilon[$ di ℓ esiste un intorno $]c-\delta, c+\delta[$ di c tale che

$$f(x) \in]\ell-\epsilon, \ell+\epsilon[\qquad \forall x:\ x \in (A\cap]c-\delta, c+\delta[),\ x \neq c.$$

Si dice anche che il limite di $f(x)$ per x che tende a c è ℓ e si scrive

$$\lim_{x\to c} f(x) = \ell.$$

Dal punto di vista del grafico, si ha che $f(x) \to \ell$ per $x \to c$ se per ogni intorno I_ℓ del punto ℓ sull'asse y esiste un intorno I_c del punto c sull'asse x tale che la restrizione $f : (A \cap I_c) \to \mathbb{R}$ abbia grafico contenuto nel rettangolo

$$\{(x,y):\ x \in I_c,\ y \in I_\ell\},$$

tranne eventualmente il punto $(c, f(c))$.

Esempio 1. Per la funzione $\log_2 : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ si ha

$$\lim_{x\to 8} \log_2 x = \log_2 8 = 3;$$

in generale, per ogni $c > 0$

$$\lim_{x\to c} \log_2 x = \log_2 c.$$

Esempio 2. Per la funzione

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 2 & \text{per } x = 3 \\ 1 & \text{per } x \neq 3 \end{cases}$$

si ha

$$\lim_{x\to 3} f(x) = 1.$$

Esempio 3. Per la funzione

$$s : \mathbb{R}_{\neq 0} \to \mathbb{R}, \quad s(x) = \begin{cases} -1 & \text{per } x < 0 \\ 1 & \text{per } x > 0 \end{cases}$$

si ha

$$\lim_{x\to 0} s(x) \quad \text{non esiste}$$

Esempio 4. Per la funzione

$$g : \mathbb{R}_{\neq 0} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \cos(\pi/x)$$

si ha

$$\lim_{x\to 0} g(x) \quad \text{non esiste.}$$

(si visualizzi con maxima il grafico di $g(x)$ nelle vicinanze di $x = 0$)

Esempio 3. Per la funzione

$$r : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}, \quad r(x) = \sqrt{x}$$

si ha

$$\lim_{x\to -1} r(x) \quad \text{non ha senso}$$

in quanto -1 non è un punto di accumulazione per $\mathbb{R}_{\geq 0}$.

Teorema 1 *Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione potenza, esponenziale, logaritmica, trigonometrica, con A suo massimo dominio di definizione, e sia $c \in A$. Allora il limite di $f(x)$ pe x che tende a c esiste ed è il valore assunto da f in c :*

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c).$$

Così come fatto per i limiti all'infinto, anche per i limiti al finito, si definiscono in totale cinque tipi di limiti: $+\infty$, finito per eccesso, finito, finito per difetto, e $-\infty$:

$$\lim_{x\to c} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to c} f(x) = \ell^+, \quad \lim_{x\to c} f(x) = \ell, \quad \lim_{x\to c} f(x) = \ell^-, \quad \lim_{x\to c} f(x) = -\infty.$$

Esplicitiamo solo la definzione di limite $+\infty$ al finito:

Definizione 3 *Siano date una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ e un punto $c \in \mathbb{R}$ di accumulazione per A. Si dice che $f(x)$ tende ad $+\infty$ per x che tende a c, e si scrive*

$$f(x) \to +\infty \quad \text{per } x \to c,$$

se per ogni $H \in \mathbb{R}$ esiste un intorno $]c-\delta, c+\delta[$ di c tale che

$$f(x) > H \qquad \forall x : \; x \in (A \cap]c-\delta, c+\delta[), \; x \neq c.$$

Si dice anche che il limite di $f(x)$ per x che tende a c è $+\infty$ e si scrive

$$\lim_{x\to c} f(x) = +\infty$$

Esempi.

$$\lim_{x\to 0} \sqrt{x} = 0^+$$

$$\lim_{x\to 0} 1/x \quad \text{non esiste} \qquad \lim_{x\to 0} 1/x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0} \log_b x = -\infty \quad \text{per } 1 < b$$

$$\lim_{x\to 0} \log_b x = +\infty \quad \text{per } 0 < b < 1$$

Limiti al finito, sinistri, destri

Definizione 4 *Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$.*
- Si dice che c è un punto di accumulazione inferiore per A se ogni intorno superiore $[c, c+r[$ di c contiene almeno un punto di A diverso da c. - Si dice che c è un punto di accumulazione superiore per A se ogni intorno inferiore $]c-r, c]$ di c contiene almeno un punto di A diverso da c.

Spesso al posto di punto di accumulazione "inferiore" o "superiore" si dice punto di accumulazione "sinistro" o "destro".

Esempio. Per l'intervallo $[0, 1[$: il punto 0 è di accumulazione sinstro ma non destro, il punto 1 è di accumulazione destro ma non sinistro, ciascun punto c con $0 < c < 1$ è di accumulazione sia sinistro che destro.

Analogamente a come si sono definiti i vari limiti al finito si definscono i vari limiti al finto "sinistri" e "destri"

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to c^+} f(x) = \ell^+, \quad \lim_{x\to c^+} f(x) = \ell, \quad \lim_{x\to c^+} f(x) = \ell^-, \quad \lim_{x\to c^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = +\infty, \quad \ldots$$

Esplicitiamo solo la definzione di limite $+\infty$ sinistro:

Definizione 5 *Siano date una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ e un punto $c \in \mathbb{R}$ di accumulazione inferiore per A. Si dice che $f(x)$ tende ad $+\infty$ per x che tende a c^+, e si scrive*

$$f(x) \to +\infty \quad \textit{per } x \to c^+,$$

se per ogni $H \in \mathbb{R}$ esiste un intorno superiore $[c, c+\delta[$ di c tale che

$$f(x) > H \qquad \forall x : \ x \in (A \cap [c, c+\delta[), \ x \neq c.$$

Si dice anche che il limite di $f(x)$ per x che tende a c "da destra" è $+\infty$ e si scrive

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = +\infty$$

Esempi.

$$\lim_{x \to 8^+} \log_2 x = 3^+ \qquad \lim_{x \to 8^-} \log_2 x = 3^-$$
$$\lim_{x \to 0^+} 1/x = +\infty \qquad \lim_{x \to 0^-} 1/x = -\infty$$

Le funzioni monotone si comportano piuttosto bene rispetto ai limiti

Teorema 2 *Siano $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione crescente e c un punto di accumulazione destro per A, Allora esiste il limite di $f(x)$ per x che tende a c^-; nel caso in cui f sia limitata su $]-\infty, c[$ si ha*

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = \mathrm{Sup}\{f(x);\ x \in]-\infty, c[\};$$

nel caso in cui f sia illimitata su $]-\infty, c[$ si ha

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = +\infty.$$

Vale un risultato analogo per x tendente a $+\infty$.

Valgono risultati analoghi per x tendente a $-\infty$ e al finito da destra.

I limiti, i limiti sinistri e i limiti destri cono collegati dalla

Proposizione 1 *Siano dati una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ e un punto c di accumulazione sia sinsitro che destro per A. Le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

esiste il limite di $f(x)$ per x che tende a c;

esistono e sono uguali il limite di $f(x)$ per x che tende a c da sinistra e il limite di $f(x)$ per x che tende a c da destra;

in caso affermativo, il limite di $f(x)$ per x che tende a c è uguale al valore comune dei limiti di $f(x)$ per x che tende a c da sinistra e da destra.