Lezione 14 - 2; Algebra lineare, 10.10.2017

Spazi vettoriali

Basi, coordinate

Ricordiamo alcuni fatti. Siano v_1, v_2 due vettori linearmente indipendenti in $\mathcal{G}_o^2$. Allora:

(1) ogni $v \in \mathcal{G}_o^2$ si può scrivere in uno ed un solo modo come combinazione lineare $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$ di v_1, v_2;

(2) si ha una funzione $\Gamma : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{G}_o^2$, $\Gamma(\alpha_1, \alpha_2) = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$; questa funzione è una biiezione, compatibile con le operazioni: per ogni $a, b \in \mathbb{R}^2$ ed ogni $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \Gamma(a+b) &= \Gamma(a) + \Gamma(b) \\ \Gamma(\alpha a) &= \alpha \Gamma(a) \end{aligned}$$

Si può così identificare $\mathcal{G}_o^2$ con $\mathbb{R}^2$. In generale, si prova il

Teorema 1 *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita, e sia v_i $(i = 1, \ldots, n)$ una sequenza linearmente indipendente massimale in V. Allora:*

(1) ogni $v \in V$ si può scrivere in uno ed un solo modo come combinazione lineare dei v_i $(i = 1, \ldots, n)$

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i;$$

(2) si ha una funzione

$$\Gamma : \mathbb{R}^n \to V, \quad \Gamma(\alpha_i)_{i=1}^{n} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i;$$

questa funzione è una biiezione, compatibile con le operazioni: per ogni $a, b \in \mathbb{R}^n$ ed ogni $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \Gamma(a+b) &= \Gamma(a) + \Gamma(b) \\ \Gamma(\alpha a) &= \alpha \Gamma(a) \end{aligned}$$

Si può così identificare V con $\mathbb{R}^n$. Ciascuna sequenza v_i $(i = 1, \ldots, n)$ linearmente indipendente massimale in uno spazio vettoriale V si dice spesso "base" di V; per ciascun vettore $v \in V$, i coefficienti α_i $(i = 1, \ldots, n)$ nella scrittura di $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$ si dicono "coordinate" di v rispetto alla base v_i $(i = 1, \ldots, n)$.

Esempio. La sequenza dei vettori canonici

$$e_i = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{\mathrm{i}}, 0, \ldots, 0) \qquad i = 1, \ldots, n$$

è una base, detta "bae canonica" di $\mathbb{R}^n$; per ciascun $a = (a_1, \ldots, a_n)$ in $\mathbb{R}^n$, si ha

$$a = a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n;$$

dunque le coordinate di un vettore di $\mathbb{R}^n$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$ sono le sue componenti. In generale, ogni sequenza di n vettori linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^n$ risulta essere una base di $\mathbb{R}^n$.

Esempio. Consideriamo l'equazione lineare omogenea

$$x + 2y + 3z = 0$$

nellle incognite x, y, z, e lo spazio $S \subset \mathbb{R}^3$ delle sue soluzioni; S ha dimensione $3 - 1 = 2$. La sequenza $(-2, 1, 0), (-3, 0, 1)$ è linearmente indipendente massimale in S, cioè è una base di S. Ciascun vettore (a, b, c) (con $a + 2b + 3c = 0$) di S, ha coordinate b, c rispetto a questa base in quanto

$$(a, b, c) = b(-2, 1, 0) + c(-3, 0, 1).$$

La funzione

$$\Gamma : \mathbb{R}^2 \to S, \qquad \Gamma(\alpha, \beta) = \alpha(-2, 1, 0) + \beta(-3, 0, 1)$$

è una biiezione, compatibile con le operazioni, che permette di identificare lo spazio S con $\mathbb{R}^2$.

Calcolo di coordinate e inversione di matrici

Esempio. Consideriamo la base $(2, 1), (5, 3)$ di $\mathbb{R}^2$. Comunque sia assegnata una sequenza di due numeri reali, è quasi immediato scrivere il vettore di $\mathbb{R}^2$ che ammette tali numeri come coordinate rispetto alla base; ad esempio, alla sequenza 3,2 corrisponde il vettore

$$3(2, 1) + 2(5, 3) = (16, 6).$$

Assegnato un vettore in $\mathbb{R}^2$, in generale è un poco laborioso scrivere le sue coordinate rispetto alla base; ad esempio, il vettore $(7, 5)$ ha coordinate α, β definite dall'uguaglianza

$$(7, 5) = \alpha(2, 1) + \beta(5, 3)$$

che equivale ad un sistema di due uguaglianze, e per determinare α, β bisogna risolvere il sistema.

Esempio. Un poco più in generale, ciascun dato $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ ha coordinate $\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2$ rispetto alla base $(2, 1), (5, 3)$ definite dall'uguaglianza

$$(x_1, x_2) = \widetilde{x}_1(2, 1) + \widetilde{x}_2(5, 3), \tag{1}$$

che equivale al sistema

$$\begin{cases} x_1 = 2\widetilde{x}_1 + 5\widetilde{x}_2 \\ x_2 = \widetilde{x}_1 + 3\widetilde{x}_2 \end{cases}; \tag{2}$$

da questo sistema bisogna ricavare $\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2$ in funzione delle x_1, x_2.
Osserviamo che:
l'uguaglianza (1) si può scrivere

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \widetilde{x}_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \widetilde{x}_2 \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix};$$

l'uguaglianza (2) si può scrivere

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{x}_1 \\ \widetilde{x}_2 \end{bmatrix}, \quad \text{in breve} \quad x = P\widetilde{x}$$

Da questa uguaglianza bisogna ricavare $\widetilde{x}$ in funzione di x. Ciò si poò fare invertendo la matrice P.

Fatto generale In $\mathbb{R}^n$ consideriamo una base

$$v_1 = (v_{11}, \dots, v_{n1}), \dots, v_n = (v_{1n}, \dots, v_{nn}).$$

Ciascun dato $(x_1, \dots, x_n)$ in $\mathbb{R}^n$ ha coordinate $\widetilde{x}_1, \dots, \widetilde{x}_n$ rispetto alla base $v_1, \dots, v_n$ definite dall'uguaglianza

$$(x_1, \dots, x_n) = \widetilde{x}_1(v_{11}, \dots, v_{n1}) + \cdots + \widetilde{x}_n(v_{1n}, \dots, v_{nn}), \tag{3}$$

che equivale al sistema

$$\begin{cases} x_1 = v_{11}\widetilde{x}_1 + \cdots + v_{1n}\widetilde{x}_n \\ \vdots \\ x_n = v_{n1}\widetilde{x}_1 + \cdots + v_{nn}\widetilde{x}_n \end{cases}; \tag{4}$$

da questo sistema bisogna ricavare $\widetilde{x}_1, \dots, \widetilde{x}_n$ in funzione delle $x_1, \dots, x_n$. Si ha che:
l'uguagkianza (3) si può scrivere

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \widetilde{x}_1 \begin{bmatrix} v_{11} \\ \vdots \\ v_{n1} \end{bmatrix} + \cdots + \widetilde{x}_n \begin{bmatrix} v_{1n} \\ \vdots \\ v_{nn} \end{bmatrix};$$

l'uguaglianza (4) si può scrivere

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{11} & \dots & v_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{n1} & \dots & v_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{x}_1 \\ \vdots \\ \widetilde{x}_n \end{bmatrix}, \quad \text{in breve} \quad x = P\widetilde{x}$$

Da questa uguaglianza bisogna ricavare $\widetilde{x}$ in funzione di x. Ciò si poò fare invertendo la matrice P, e si ottiene

$$\widetilde{x} = P^{-1}x.$$

(La matrice P è invertibile in quanto ha per colonne i vettori $v_1, \dots, v_n$, che sono linearmente indipendenti.)