Lezione 16; Analisi, 11.10.2017

1 Limiti

Limiti e ordine

Di seguito descriviamo il comportamento dell'operazione di limite di una funzione a un punto (al finito o all'infinto) rispetto all'ordinamento e alle operazioni aritmetiche sulle funzioni e sui numeri reali.

> Considereremo funzioni $f, g, \ldots$ aventi uno stesso dominio A e un punto c di accumulazione per A. Salvo avviso contrario, sottintenderemo sempre che i limiti di una funzione $f(x)$ sono per $x \to c$ e dunque al posto di $\lim_{x\to c} f(x)$ scriveremo $\lim f(x)$.

Limiti e ordinamento L'operazione di limite si comporta piuttosto bene rispetto all'ordinamento sulle funzioni e sui numeri.

Proposizione 1 *Siano date due funzioni f, g che possiedono limite e siano $\lim f(x) = \ell$ e $\lim g(x) = m$, con $\ell, m \in \mathbb{R}$. Se $f > g$ in un intorno del punto limite, allora $\ell \geq m$. In particolare, data una funzione f che possiede limite e che è maggiore di 0 in un intorno del punto limite, si ha $\lim f(x) \geq 0$.*

Esempio. Alla disuguaglianza stretta fra le funzioni può effettivamente corrispondere un'uguaglianza fra i limiti. Per la funzione $1/x$ $(x \in \mathbb{R}_{\neq 0})$ ed il punto limite $c = +\infty$ si ha che $1/x > 0$ sull'intorno $]0, +\infty[$ di $+\infty$ e $\lim(1/x) = 0$.

Un criterio utile per assicurare l'esistenza e stabilire il valore di un limite è dato dal seguente

Teorema 1 **(dei due carabinieri)** *Siano date tre funzioni f_1, g, f_2 la prima e la terza delle quali possiedano limite e siano $\lim f_2(x) = \ell$ e $\lim f_1(x) = \ell$ con $\ell \in \mathbb{R}$. Se $f_2 \geq g \geq f_1$ in un intorno del punto limite, allora anche la seconda funzione possiede limite e $\lim g(x) = \ell$.*

Si hanno anche le seguenti varianti

Teorema 2 *Siano date due funzioni g, f e si abbia $\lim f(x) = +\infty$. Se $g \geq f$ in un intorno del punto limite, allora $\lim g(x) = +\infty$.*
Siano date due funzioni f, g e si abbia $\lim f(x) = -\infty$. Se $f \geq g$ in un intorno del punto limite, allora $\lim g(x) = -\infty$.

Esempi.
-Consideriamo la funzione $\frac{\sin(x)}{x}$ $(x \in]0, +\infty[)$ e il punto limite $+\infty$. Osserviamo che

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq \frac{1}{x}, \quad \forall x \in]0, +\infty[$$

$$\lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x} = 0 = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}$$

dunque per il teorema dei due carabinieri si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0.$$

-Consideriamo la funzione $x + \sin(x)$ ($x \in \mathbb{R}$) e il punto limite $+\infty$. Osserviamo che

$$x - 1 \leq x + \sin(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$
$$\lim_{x\to+\infty} (x-1) = +\infty$$

dunque per una variante del teorema dei due carabinieri si ha

$$\lim_{x\to+\infty} (x + \sin(x)) = +\infty.$$

Limiti e operazioni aritmetiche

Somma. L'operazione di limite si comporta bene rispetto all'operazione di somma, nel caso di limite finito.

Proposizione 2 *Siano f, g due funzioni che possiedono limite finito.*

$$\textit{Se} \quad \left.\begin{array}{l} \lim f(x) = \alpha \\ \lim g(x) = \beta \end{array}\right\} \quad \textit{allora} \quad \lim(f(x) + g(x)) = \alpha + \beta.$$

Un analogo risultato vale per l'operazione di differenza.

Proposizione 3 *Per l'eventuale limite della funzione somma $f(x) + g(x)$ in funzione dei limiti delle funzioni addendi $f(x)$ e $g(x)$ vale la seguente tabella, dove: gli indici di riga sono i possibili limiti della funzione $f(x)$ e gli indici di colonna sono i possibili limiti della funzione $g(x)$; si distinguono i casi $-\infty$, un numero e $+\infty$.*

$+$	$-\infty$	β	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	?
α	$-\infty$	$\alpha + \beta$	$+\infty$
$+\infty$	?	$+\infty$	$+\infty$

Nell'ultima casella della prima riga si e' messo un punto di domanda in quanto per due funzioni, una tendente a $-\infty$ ed una a $+\infty$, la funzione somma puo' tendere a $+\infty$, tendere a $-\infty$, tendere a un numero finito, oppure non tendere ad alcun limite, come mostrato dagli esempi seguenti

$f(x)$	$g(x)$	$f(x) + g(x)$	
$-x$	$2x$	x	
$-2x$	x	$-x$	per $x \to +\infty$
x	$-x$	0	
$-x$	$x + \cos(x)$	$\cos(x)$	

Si dice che per due funzioni, una tendente a $+\infty$ ed una $-\infty$, il comportamento della funzione somma e' una forma di indecisione. In breve, si dice che

$+\infty - \infty$ è una "forma di indecisione".

Esempio. Consideriamo la funzione $2^x + 1/x$ ($x \in \mathbb{R}_{\neq 0}$) per $x \to 0^-$.
Si ha $2^x \to 1$ e $1/x \to -\infty$ per $x \to 0^-$ e dunque
$(2^x + 1/x) \to -\infty$ per $x \to 0^-$.

Prodotto per scalari. L'operazione di limite si comporta bene rispetto all'operazione di prodotto per scalari.

Proposizione 4 *Per l'eventuale limite della funzione $\alpha f(x)$ in funzione dl limite della funzione $f(x)$ vale la seguente tabella dove: gli indici di riga sono i tre possibili tipi di scalari (positivo, nullo, negativo) e gli indici di colonna sono i tre possibili limiti della funzione $f(x)$ ($+\infty$, finito, $-\infty$)*

	$+\infty$	β	$-\infty$
$\alpha > 0$	$+\infty$	$\alpha\beta$	$-\infty$
0	0	0	0
$\alpha < 0$	$-\infty$	$\alpha\beta$	$+\infty$

Prodotto. L'operazione di limite si comporta bene rispetto all'operazione di prodotto, nel caso di limite finito.

Proposizione 5 *Siano f, g due funzioni che possiedano limite finito.*

$$\text{Se} \quad \left.\begin{array}{l} \lim f(x) = \alpha \\ \lim g(x) = \beta \end{array}\right\} \quad \text{allora} \quad \lim(f(x)g(x)) = \alpha\beta.$$

Proposizione 6 *Per l'eventuale limite della funzione prodotto $f(x)g(x)$ in funzione dei limiti delle funzioni fattori $f(x)$ e $g(x)$ vale la seguente tabella, dove: gli indici di riga sono i possibili limiti della funzione $f(x)$ e gli indici di colonna sono i possibili limiti della funzione $g(x)$; si distinguono i casi* 0 *(nel senso di 0^+ o 0^-) un numero diverso da 0 e ∞ (nel senso di $+\infty$ o $-\infty$); il segno del prodotto e' dato dall'usuale regola.*

$\cdot$	0	β	∞
0	0	0	?
α	0	$\alpha\beta$	∞
∞	?	∞	∞

Nell'ultima casella della prima riga si e' messo un punto di domanda in quanto per due funzioni, una tendente a 0 ed una a ∞, la funzione prodotto puo' tendere a ∞, tendere a 0, tendere a un numero finito, oppure non tendere ad alcun limite, come mostrato dagli esempi seguenti

$f(x)$	$g(x)$	$f(x)g(x)$
x^{-1}	x^2	x
x^{-2}	x	x^{-1}
x^{-1}	x	1
$x^{-1}\sin(x)$	x	$\sin(x)$

per $x \to +\infty$

Si dice che per due funzioni, una tendente a 0 ed una ∞, il comportamento della funzione somma e' una forma di indecisione. In breve, si dice che

$0 \cdot \infty$ è una "forma di indecisione".

Inversione. L'operazione di limite si comporta bene rispetto all'operazione aritmetica di inversione, nel caso di limite finito diverso da zero.

Proposizione 7 *Sia f una funzione che assume solo valori $\neq 0$ in un intorno del punto limite, e che possieda limite finito $\neq 0$. Se $\lim f(x) = \alpha$ allora $\lim (1/f(x)) = 1/\alpha$.*

Proposizione 8 *Per l'eventuale limite della funzione $1/f(x)$ in funzione del limite della funzione $f(x)$ vale la seguente tabella, dove gli indici di colonna sono i possibili limiti della funzione $f(x)$ e si distinguono i casi 0^+ e 0^-, un numero diverso da 0, $+\infty$ e $-\infty$.*

$\lim f(x)$	0^+	0^-	α	$+\infty$	$-\infty$
$\lim (1/f(x))$	$+\infty$	$-\infty$	$1/\alpha$	0^+	0^-

Se il limite di $f(x)$ e' 0 senza essere ne' 0^+ ne' 0^- allora il limite di $1/f(x)$ puo' non esistere (in realta' non esiste mai).

Quoziente. L'operazione di limite si comporta bene rispetto all'operazione di quoziente, nel caso in cui il limite della funzione numeratore e' finito e il limite della funzione denominatore e' finito e diverso da zero.

Proposizione 9 *Siano f, g due funzioni che possiedono limite, e g assuma solo valori $\neq 0$ in un intorno del punto limite.*

$$\textit{Se} \quad \left.\begin{array}{l} \lim f(x) = \alpha \\ \lim g(x) = \beta \neq 0 \end{array}\right\} \quad \textit{allora} \quad \lim(f(x)/g(x)) = \alpha/\beta.$$

In generale, si ha

Proposizione 10 *Per l'eventuale limite della funzione quoziente $f(x)/g(x)$ in funzione dei limiti delle funzioni $f(x)$ e $g(x)$ vale la seguente tabella, dove: gli indici di riga sono i possibili limiti della funzione $f(x)$ e gli indici di colonna sono i possibili limiti della funzione $g(x)$; si distinguono i casi 0 (nel senso di 0^+ o 0^-) un numero diverso da 0 e ∞ (nel senso di $+\infty$ o $-\infty$); il segno del quoziente e' dato dall'usuale regola.*

$\cdot$	0	β	∞
0	?	0	0
α	∞	α/β	0
∞	∞	∞	?

Nella prima casella della prima riga e nell'ultima casella dell'ultima riga si e' messo un punto di domanda in quanto per due funzioni, entrambe tendenti a 0 o entrambe tendenti a ∞, la funzione quoziente puo' tendere a ∞, tendere a un numero finito, oppure non tendere ad alcun limite. Si dice che in questi casi si ha una forma di indecisione. In breve, si dice che

$0/0$ e ∞/∞ sono "forme di indecisione".

Esempio. Consideriamo la funzione $\cos x/\log x$ ($x \in \mathbb{R}_{>0}$) per $x \to 0^+$.
Si ha $\cos x \to 1$ e $\log x \to -\infty$ per $x \to 0^+$ e dunque
$\cos x/\log x \to 0^-$ per $x \to 0^+$.

Limiti di Polinomi e funzioni razionali

Funzioni polinomiali

Consideriamo la funzione polinomiale $2x^2 + 3x + 5$ ($x \in \mathbb{R}$).
Per $x \to +\infty$, si ha $x^2 \to +\infty$ e $x \to +\infty$, da cui $(2x^2 + 3x + 5) \to +\infty$.
Per $x \to -\infty$, si ha $x^2 \to +\infty$ e $x \to -\infty$, ... e si ha una forma di indecisione. Si può pensare che il termine x^2 è "dominante" sul termine x, e mettere in evidenza questo raccogliendo x^2 :

$$2x^2 + 3x + 5 = x^2(2 + 3/x + 5/x^2).$$

Si ha $x^2 \to +\infty$ e $(2 + 3/x + 5/x^2) \to 2$ per $x \to -\infty$. Dunque

$$(2x^2 + 3x + 5) \to +\infty, \quad \text{per } x \to -\infty$$

In generale, per una funzione polinomiale di grado $n > 0$

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \qquad (a_n \neq 0),$$

nel caso $a_n > 0$ si ha

$$\begin{array}{lll} \text{per } n \ \ \text{pari}, & p_n(x) \to +\infty & \text{per } x \to \pm\infty \\ \text{per } n \ \ \text{dispari}, & p_n(x) \to \pm\infty & \text{per } x \to \pm\infty \end{array}$$

Ciò deriva dal fatto che

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_0 = x^n \left(a_n + a_{n-1} x^{-1} + a_{n-2} x^{-2} + \cdots + a_0 x^{-n} \right)$$

e

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(a_n + a_{n-1} x^{-1} + a_{n-2} x^{-2} + \cdots + a_0 x^{-n} \right) = a_n.$$

Funzioni razionali

Consideriamo la funzione razionale $(4x + 5)/(2x + 3)$ ($x \in \mathbb{R}_{\neq -3/2}$).

Per $x \to +\infty$, si ha $(4x+5) \to +\infty$ e $(2x+3) \to +\infty$, ... e si ha una forma di indecisione. Si può pensare che il termine $4x$ è "dominante" sulla costante 5, che il termine $2x$ è "dominante" sulla costante 3, e mettere in evidenza questo con dei ragccoglimenti

$$\frac{4x+5}{2x+3} = \frac{x(4+5/x)}{x(2+3/x)} = \frac{4+5/x}{2+3/x}$$

Si ha $(4+5/x) \to 4$ e $(2+3/x) \to 2$ per $x \to +\infty$.
Dunque $(4x+5)/(3x+2) \to 4/2 = 2$ per $x \to +\infty$.

Consideriamo una funzione razionale data dal quoziente di un polinomio di grado $n > 0$ su un polinomio di grado $m > 0$

$$\frac{ax^n + bx^{n-1} + \cdots}{cx^m + dx^{m-1} + \cdots} \qquad (a, c \neq 0).$$

In prima battuta si ha

$$\frac{ax^n + bx^{n-1} + \cdots}{cx^m + dx^{m-1} + \cdots} \longrightarrow \frac{\infty}{\infty}$$

(dove il segno di ∞ al numeratore e' il segno di a e il segno di ∞ al denominatore e' il segno di c), una forma di indecisione. Mettendo in evidenza a numeratore e denominatore i termini di grado massimo si ha

$$\frac{x^n(a+bx^{-1}+\cdots)}{x^m(c+dx^{-1}+\cdots)} \quad = \quad x^{n-m}\frac{a+bx^{-1}+\cdots}{c+dx^{-1}+\cdots} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} \infty & \text{se } n > m \\ a/c & \text{se } n = m \\ 0 & \text{se } n < m \end{cases}.$$

(il segno di ∞ e il segno di a/c, analogamente per lo zero)