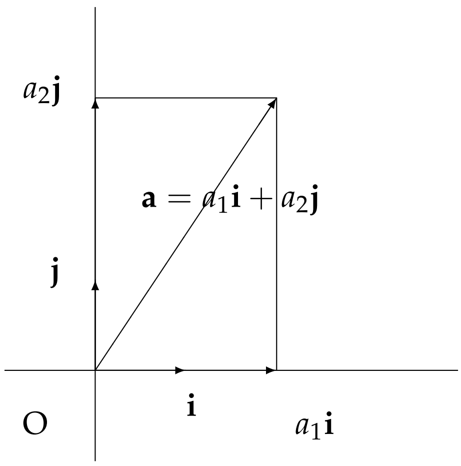
Lezione 16; Algebra lineare, 11.10.2017

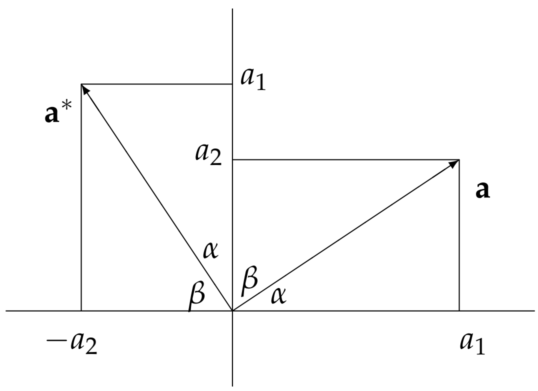
Spazi Vettoriali Euclidei

Piano Vettoriale Euclideo

Diciamo piano vettoriale euclideo, ed indichiamo con $\mathcal{E}_o^2$, il piano vettoriale $\mathcal{G}_o^2$ dei vettori applicati in un fissato punto O del piano, munito della nozione di ortogonalità fra due vettori e di lunghezza di un vettore. Scriviamo $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$ per indicare che i vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ sono ortogonali, e scriviamo $|\mathbf{u}|$ per indicare la lunghezza di un vettore $\mathbf{u}$ rispetto ad una fissata unità di misura. Sia fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico, siano cioè fissati due vettori $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ fra loro ortogonali ed aventi lunghezza unitaria, in simboli: $\mathbf{i} \perp \mathbf{j}$ e $|\mathbf{i}| = |\mathbf{j}| = 1$. Identifichiamo ciascun vettore $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ di $\mathbb{R}^2$ con un vettore $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$ del piano.



Ortogonalità e Prodotto Scalare Dato un vettore non nullo $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$, ci sono un paio di scelte psicologicamente naturali per un vettore ortogonale ad $\mathbf{a}$, una delle quali è $\mathbf{a}^* = (-a_2, a_1)$.



La scelta e' corretta. Informalmente, si puo' osservare che si vengono a formare quattro triangoli rettangoli uguali, l'angolo formato dai vettori $\mathbf{a}$ e $\mathbf{a}^*$ e' $\alpha+\beta$, ma $\alpha+\beta$ e' anche l'angolo formato dai due assi coordinati, che e' retto.

Per ogni due vettori $\mathbf{a}=(a_1,a_2)$ e $\mathbf{b}=(b_1,b_2)$ di $\mathbb{R}^2$ lo scalare

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=a_1b_1+a_2b_2$$

viene detto "prodotto scalare" di $\mathbf{a}$ per $\mathbf{b}$. Osserviamo che

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=[\,a_1\ a_2\,]\begin{bmatrix} b_1\\ b_2\end{bmatrix}.$$

La relazione di ortogonalità si puo' esprimere in funzione del prodotto scalare. Precisamente, si prova che

> per ogni coppia di vettori $\mathbf{a}=(a_1,a_2)$ e $\mathbf{b}=(b_1,b_2)$ di $\mathbb{R}^2$, si ha
>
> $$\mathbf{a}\perp\mathbf{b}\quad \text{se e solo se}\quad \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0.$$

(Questo è coerente con quanto osservato sopra: $(a_1,a_2)\perp(-a_2,a_1)$ in quanto $(a_1,a_2)\cdot(-a_2,a_1)=-a_1a_2+a_2a_1=0.$)

Il prodotto scalare possiede le seguenti proprietà; per ogni $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ in $\mathbb{R}^2$ ed ogni α in $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c}) &= \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}\\
(\mathbf{a}+(\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} &= \mathbf{a}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}\\
\alpha(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) &= (\alpha\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}=\mathbf{a}\cdot(\alpha\mathbf{b})\\
\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} &= \mathbf{b}\cdot\mathbf{a}\\
\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} &\geq 0,\\
\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} &= 0 \quad\Leftrightarrow\quad \mathbf{a}=\mathbf{0}
\end{aligned}$$

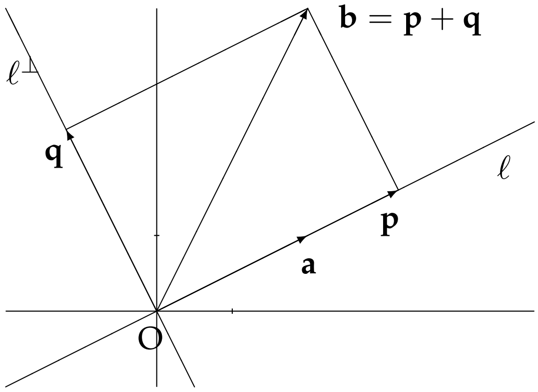
Le ultime due proprietà seguono dal fatto che per ogni (a_1,a_2) in $\mathbb{R}^2$ si ha

$$(a_1,a_2)\cdot(a_1,a_2)=a_1^2+a_2^2.$$

Proiezione ortogonale di un vettore su un vettore. Dato nel piano un vettore $\mathbf{a}$ non nullo, siano ℓ la retta per O generata da $\mathbf{a}$ e $\ell^\perp$ la retta per O ortogonale ad ℓ. Ogni vettore $\mathbf{b}$ del piano si può scomporre in uno ed un solo modo come somma di un vettore $\mathbf{p}$ sulla retta ℓ ed un vettore $\mathbf{q}$ sulla retta $\ell^\perp$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{b}=\mathbf{p}+\mathbf{q}\\
&\mathbf{p}\in\ell\\
&\mathbf{q}\in\ell^\perp
\end{aligned}$$

Si dice che $\mathbf{p}$ è la "proiezione ortogonale" di $\mathbf{b}$ su ℓ e si pone $\mathbf{p}=\mathrm{pr}_\ell(\mathbf{b})$.



Vediamo di seguito come si possa ricavare una formula per la proiezione ortogonale di $\mathbf{b}$ su ℓ. Scelto un vettore non nullo $\mathbf{a}$ su ℓ, cerchiamo due vettori $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^2$ che soddisfino le condizioni

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= \mathbf{p} + \mathbf{q} \\ \mathbf{p} &= r\mathbf{a}, \qquad r \in \mathbb{R} \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{q} &= 0, \end{aligned}$$

dove r e' uno scalare incognito. Sostituendo l'espressione di $\mathbf{p}$ in funzione di r nella prima condizione

$$\mathbf{b} = \mathbf{a}r + \mathbf{q},$$

ed applicando and entrambe i membri il prodotto scalare con $\mathbf{a}$ si ha

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})r + \mathbf{a} \cdot \mathbf{q},$$

da cui, per la terza condizione, si ha

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})r.$$

Ora, questa è un'equazione lineare nell'incognita r, e il coefficiente $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$ è diverso da 0 in quanto $\mathbf{a}$ è diverso dal vettore nullo. Si ha così una ed una sola soluzione:

$$r = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}},$$

dalla quale si ottiene

$$\mathbf{p} = r\mathbf{a} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}.$$

Lo scalare $\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$ si dice *coefficiente di Fourier* di $\mathbf{b}$ rispetto ad $\mathbf{a}$; il vettore $\mathbf{p}$ si dice anche *proiezione ortogonale* di $\mathbf{b}$ su $\mathbf{a}$ e si indica con

$$\mathrm{pr}_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}).$$

Esempio Nel caso concreto dei vettori del piano in cui $\mathbf{a} = (2,1)$, e $\mathbf{b} = (2,4)$, si ha

$$r = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \frac{(2,1) \cdot (2,4)}{(2,1) \cdot (2,1)} = \frac{8}{5}.$$

da cui

$$\mathrm{pr}_a(\mathbf{b}) = r\mathbf{a} = \frac{8}{5}(2,1) = (\frac{16}{5}, \frac{8}{5}).$$

Basi ortogonali, coordinate Siano dati due vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ di $\mathbb{R}^2$, non nulli e fra loro ortogonali: $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \neq \mathbf{0}$ e $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$. Due tali vettori non sono mai allineati, dunque formano una base di $\mathbb{R}^2$. Ciascun vettore $\mathbf{v}$ di $\mathbb{R}^2$ ha coordinate α, β rispetto alla base $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$, definite dall'uguaglianza

$$\mathbf{v} = \alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2.$$

Applicando il prodotto scalare con $\mathbf{v}_1$ ad entrambi i membri dell'uguaglianza, per le proprietà del prodotto scalare e per l'ipotesi $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$ si ottiene

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v} = \alpha(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1);$$

da questa, per l'ipotesi $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$ e dunque $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 \neq 0$, si ottiene

$$\alpha = \frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}.$$

In modo analogo, si ottiene

$$\beta = \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2}.$$

Abbiamo così visto che: le coordinate di un vettore $\mathbf{v}$ di $\mathbb{R}^2$ rispetto ad una base ortogonale $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ di $\mathbb{R}^2$ sono i coefficienti di Fourier di $\mathbf{v}$ rispetto a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$.

Esempio. Le coordinate del vettore $(7,8)$ rispetto alla base ortogonale $(2,1), (-1,2)$ di $\mathbb{R}^2$ sono

$$((2,1) \cdot (7,8))/((2,1) \cdot (2,1)) = 22/5,$$
$$((-1,2) \cdot (7,8))/((-1,2) \cdot (-1,2)) = 9/5.$$

Spazio Vettoriale 3-dimensionale Euclideo

Diciamo spazio vettoriale 3-dimensionale euclideo, ed indichiamo con $\mathcal{E}^3_o$, spazio vettoriale 3-dimensionale $\mathcal{G}^3_o$ dei vettori applicati in un fissato punto O dello spazio, munito della nozione di ortogonalità fra due vettori e di lunghezza di un vettore. Scriviamo $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$ per indicare che i vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ sono ortogonali, e scriviamo $|\mathbf{u}|$ per indicare la lunghezza di un vettore $\mathbf{u}$ rispetto ad una fissata unità di misura. Sia fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico, siano cioè fissati tre vettori $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ fra loro ortogonali ed aventi lunghezza unitaria, in simboli: $\mathbf{i} \perp \mathbf{j}$, $\mathbf{i} \perp \mathbf{k}$, $\mathbf{j} \perp \mathbf{k}$, e $|\mathbf{i}| = |\mathbf{j}| = |\mathbf{k}| = 1$. Identifichiamo ciascun vettore $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ di $\mathbb{R}^3$ con un vettore $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ dello spazio.

Ortogonalità e Prodotto Scalare Per ogni due vettori $\mathbf{a} = (a_i)_1^3$ e $\mathbf{b} = (b_i)_1^3$ di $\mathbb{R}^3$ lo scalare

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i$$

viene detto "prodotto scalare" di $\mathbf{a}$ per $\mathbf{b}$. Osserviamo che

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}.$$

La relazione di ortogonalità si puo' esprimere in funzione del prodotto scalare. Precisamente, si prova che

> per ogni due vettori $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ di $\mathbb{R}^3$, si ha
>
> $$\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \quad \text{se e solo se} \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0.$$

Questo fatto è coerente col fatto che i vettori $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$, $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ sono assunti fra loro ortogonali; infatti:

$$\begin{aligned}
(1, 0, 0) \cdot (0, 1, 0) &= 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 0 \\
(1, 0, 0) \cdot (0, 0, 1) &= 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0 \\
(0, 1, 0) \cdot (0, 0, 1) &= 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0
\end{aligned}$$

Il prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$ possiede le stesse proprietà che possedeva in $\mathbb{R}^2$.

Basi Ortogonali Lo spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^3$ ha una base ortogonale ovvia, la base canonica $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$. Di seguito mostraimo come a partire da una base di $\mathbb{R}^3$ si possa costruire, con poche variazioni, una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$.

Sia data una base $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ di $\mathbb{R}^3$. Allora la sequenza $\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}$ sotto descritta è una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{a}} &= \mathbf{a} \\
\bar{\mathbf{b}} &= \mathbf{b} - \mathrm{pr}_{\bar{\mathbf{a}}}(\mathbf{b}) \\
\bar{\mathbf{c}} &= \mathbf{c} - \mathrm{pr}_{\bar{\mathbf{a}}}(\mathbf{c}) - \mathrm{pr}_{\bar{\mathbf{b}}}(\mathbf{c})
\end{aligned}$$

Questa costruzione si dice "processo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt."

Esempio A partire dai vettori

$$\mathbf{a} = (1, 0, 1), \; \mathbf{b} = (0, 1, 1), \; \mathbf{c} = (0, 0, 1),$$

che sono una base di $\mathbb{R}^3$, il processo di Gram-Schmidt fornisce la seguente sequenza di vettori che è una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$.

$$
\begin{aligned}
\bar{\mathbf{a}} &= (1,0,1) \\
\bar{\mathbf{b}} &= (0,1,1) - \mathrm{pr}_{(1,0,1)}((0,1,1)) \\
&= (0,1,1) - \frac{1}{2}(1,0,1) \\
&= (-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}) \\
\bar{\mathbf{c}} &= (0,0,1) - \mathrm{pr}_{(1,0,1)}((0,0,1)) - \mathrm{pr}_{(-\frac{1}{2},1,\frac{1}{2})}((0,0,1)) \\
&= (0,0,1) - \frac{1}{2}(1,0,1) - \frac{1}{3}(-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}) \\
&= (-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3})
\end{aligned}
$$