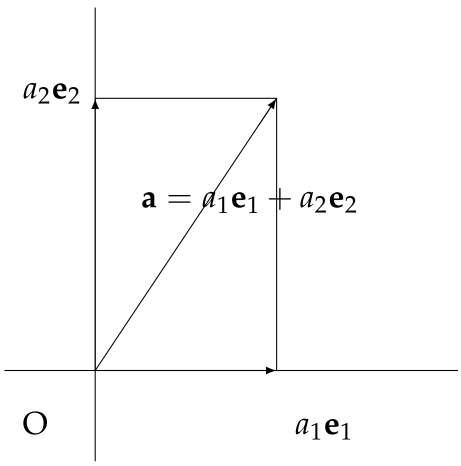
Lezione 18 - 2; Algebra Lineare, 16.10.2017

Prodotto scalare di due vettori nel piano, lunghezza. Indichiamo con $\|\mathbf{a}\|$ la lunghezza di un vettore $\mathbf{a}$.

Fissato nel piano un punto O, rappresentiamo ciascun vettore del piano con un segmento orientato con origine O. Identifichiamo i vettori canonici $\mathbf{e}_1$ ed $\mathbf{e}_2$ di $\mathbb{R}^2$ con due vettori del piano aventi lunghezza uno e fra loro ortogonali, e di conseguenza identifichiamo ciascun vettore $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ di $\mathbb{R}^2$ con un vettore $\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2$ del piano.

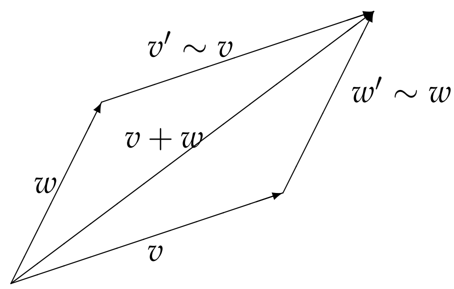
La lunghezza di un vettore si puo′ esprimere in funzione del prodotto scalare. Infatti un qualsiasi vettore $\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2$ e′ la diagonale del rettangolo avente per lati i vettori $a_1\mathbf{e}_1$ e $a_2\mathbf{e}_2$, cosi′ dal teorema di Pitagora si ha

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\|a_1\mathbf{e}_1\|^2 + \|a_2\mathbf{e}_2\|^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}.$$



La lunghezza dei vettori e′ legata alle operazioni sui vettori nel modo seguente:

- Consideriamo due vettori v, w e il vettore $v + w$ loro somma.



Osserviamo che un punto che partendo da O si sposta prima lungo il vettore v e poi si sposta lungo il vettore $w' \sim w$ descrive due lati di un triangolo che ammette il vettore $v + w$ come terzo lato. Ora, la lunghezza di un lato di un triangolo non supera la somma delle lunghezze degli altri due. Si ha cosi' si ha disuguaglianza

$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|,$$

detta appunto *disuguaglianza triangolare*.

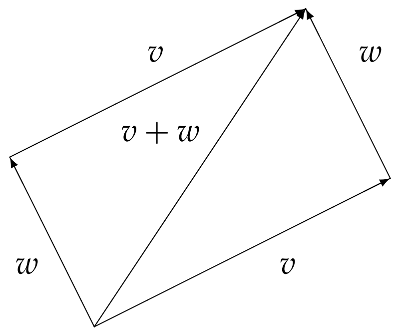
- Consideriamo un vettore v, uno scalre r e il vettore vr multiplo di v secondo r. Allora:

$$\|rv\| = |r|\|v\|,$$

dove $|r|$ e' il valore assoluto di r.

Il teorema di Pitagora puo' essere espresso nella forma seguente: se due vettori v e w sono fra loro ortogonali, allora il quadrato della lunghezza del vettore somma $v + w$ e' uguale alla somma dei quadrati delle lunghezze dei vettori addendi v, w :

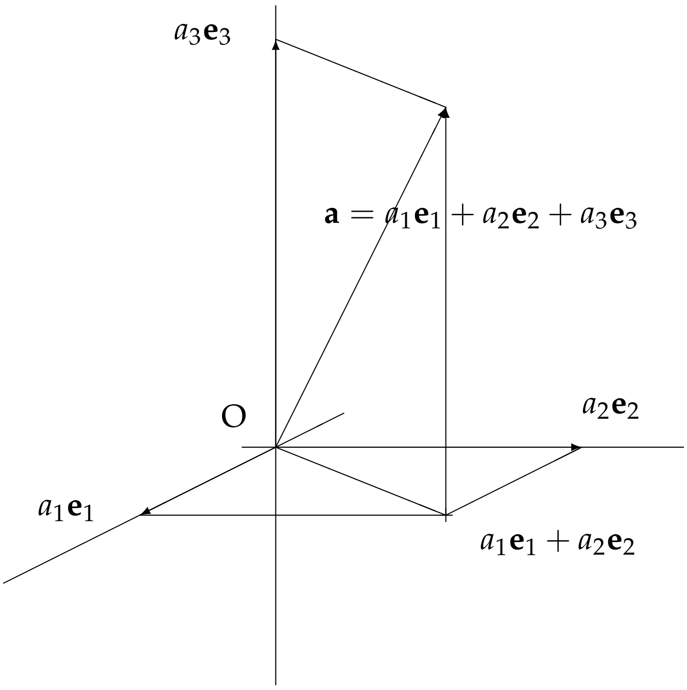
$$\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2.$$



Prodotto scalare di due vettori nello spazio, lunghezza. Fissato nello spazio un punto O, rappresentiamo ciascun vettore dello spazio con un segmento orientato con origine O. Identifichiamo i vettori canonici $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ed $\mathbf{e}_3$ di $\mathbb{R}^3$ con tre vettori dello spazio aventi ciascuno lunghezza uno e a due a due ortogonali, e di conseguenza identifichiamo ciascun vettore $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ di $\mathbb{R}^3$ con un vettore $\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3$ dello spazio.

La lunghezza di un vettore si puo' esprimere in funzione del prodotto scalare. Infatti un qualsiasi vettore $\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3$ e' la diagonale del rettangolo avente per lati i vettori $a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2$ e $a_3\mathbf{e}_3$, e il vettore $a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2$ e' la diagonale del rettangolo avente per lati i vettori $a_1\mathbf{e}_1$ e $a_2\mathbf{e}_2$, cosi' dal teorema di Pitagora si ha

$$\begin{aligned}
\|a\| &= \sqrt{\|a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2\|^2 + \|a_3\mathbf{e}_3\|^2} \\
&= \sqrt{\left(\sqrt{\|a_1\mathbf{e}_1\|^2 + \|a_2\mathbf{e}_2\|^2}\right)^2 + \|a_3\mathbf{e}_3\|^2} \\
&= \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}.
\end{aligned}$$


$a_3\mathbf{e}_3$
$\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3$
O
$a_2\mathbf{e}_2$
$a_1\mathbf{e}_1$
$a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2$