Esercizi, IV settimana

1. Si calcolino, se esistono, i seguenti limiti

$$\begin{aligned}
(2e^x - 3x)/(4x + 3e^x) &\quad \text{per } x \to +\infty \text{ e } -\infty \\
(2\log x - 3x)/(4x + 3\log x) &\quad \text{per } x \to +\infty \text{ e } 0^+ \\
e^x/x - x &\quad \text{per } x \to +\infty,\ 0,\ -\infty
\end{aligned}$$

2. Per ciascuna delle seguenti funzioni: (1) si determini l'insieme C dei punti $c \in \mathbb{R}^*$ non appartenenti al dominio per i quali ha senso il limite della funzione per $x \to c$; (2) si calcolino gli eventuali limiti della funzione per x che tende a punti di C; (3) si dia una rappresentazione del grafico della funzione coerente con le informazioni ottenute.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \exp\left(\frac{x^2}{1-x^2}\right), &\qquad (x \in \mathbb{R}_{\neq \pm 1}) \\
g(x) &= \log\left(\frac{x}{x^2-1}\right), &\qquad (x \in]-1, 0[\cup]1, +\infty[) \\
h(x) &= \sin\left(\frac{\pi x + 1}{2x+1}\right), &\qquad (x \in \mathbb{R}_{\neq -\frac{1}{2}})
\end{aligned}$$

3. Si calcolino, se esistono, i seguenti limiti

$$\left(1 + \frac{a}{x}\right)^x \qquad \text{per } x \to +\infty \qquad (a \text{ parametro reale})$$

4. Si calcolino, se esistono, i seguenti limiti

$$\begin{aligned}
\log(1+2x)/3x &\quad \text{per } x \to 0 \\
\log(1+\sqrt{x})/x &\quad \text{per } x \to 0^+ \\
x\log(1+1/x) &\quad \text{per } x \to +\infty \text{ e } -\infty \\
(e^{3x} - 1)/x &\quad \text{per } x \to 0 \\
(e^{x^{3/2}} - 1)/x &\quad \text{per } x \to 0^+ \\
\sin(x/2)/x &\quad \text{per } x \to 0 \\
\sin(\sqrt{x})/x &\quad \text{per } x \to 0^+
\end{aligned}$$

5. In $\mathbb{R}^4$ sono dati i vettori $a = (1, -1, 1, -1)$ e $b = (2, 3, 4, 5)$. (1) Si verifichi che a e b soddisfano la disuguaglianza triangolare. (2) Si scriva b come somma $b = p + q$ di un vettore p multiplo scalare di a e di un vettore q ortogonale ad a. (3) Si verifichi che i vettori p e q trovati sono ortogonali. (4) Si verifichi che i vettori p e q trovati soddisfano il teorema di Pitagora.

6. Sono date le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & t \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad (t \text{ parametro reale}).$$

Si discuta e si risolva l'equazione nella matrice incognita X

$$AX = B.$$

7. È data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & p \end{bmatrix} \qquad (p \text{ parametro reale})$$

Si determinino i valori di p per i quali la matrice A è singolare. Per ciascuno di tali valori, si individui una riga di A che è combinazione lineare delle altre due e una colonna di A che è combinazione lineare delle altre due.