Lezione 18-1; Analisi, 17.10.2017

Limiti

Confronto fra Infiniti

Per x che tende a $+\infty$, abbiamo visto che:
- ciascuna funzione potenza x^α ($x \in \mathbb{R}_{>0}$) con $\alpha > 0$ tende a $+\infty$;
- ciascuna funzione esponenziale b^x ($x \in \mathbb{R}$) con $b > 1$ tende a $+\infty$;
- ciascuna funzione logaritmica $\log_b x$ ($x \in \mathbb{R}_{>0}$) con $b > 1$ tende a $+\infty$;

Ma c'è una differenza sostanziale fra i modi in cui tendono a $+\infty$ le varie funzioni potenza, le varie funzioni esponenziali, le varie funzioni logaritmo. Per farsi un'idea:
si provi a confrontare i valori di 2^x e x^2 per un certo numero di valori della x;
si visualizzi con maxima una parte dei grafici di $2^x, x^2, x^{1/2}, \log_2 x$;

Si prova che

Teorema 1 *Per ogni $b > 1$ ed ogni $\alpha > 0$ si ha*

$$\frac{b^x}{x^\alpha} \to +\infty, \ \ per \ \ x \to +\infty$$
$$\frac{x^\alpha}{\log_b x} \to +\infty, \ \ per \ \ x \to +\infty$$

Si esprime questo teorema a parole dicendo che per $x \to +\infty$ ciascuna funzione esponenziale tende a ∞ "più velocemente" di ciascuna funzione potenza e ciascuna funzione potenza tende a ∞ "più velocemente" di ciascuna funzione logaritmica; si dice anche che ciascuna funzione potenza tende a ∞ "più lentamente" di ciascuna funzione esponenziale e ...

Per il limite della funzione quoziente $f(x)/g(x)$ in funzione dei limiti delle funzioni $f(x)$ e $g(x)$ vale la seguente tabella, dove: gli indici di riga sono alcuni tipi di funzione $f(x)$ e gli indici di riga sono alcuni tipi di funzione $f(x)$

$\cdot$	c^x	x^β	$\log_c x$
b^x	$\cdots$	$+\infty$	$+\infty$
x^α	0^+	$\cdots$	$+\infty$
$\log_b x$	0^+	0^+	$\cdots$

$(b, c > 1; \ \alpha, \beta > 0)$

Nelle caselle lasciate vuote vanno inseriti dei valori che dipendono dalla relazione fra i parametri; si lascia al lettore di riempirle.

Più in generale, dato un insieme $A \subset \mathbb{R}$ ed un punto $c \in \mathbb{R}^*$ di accumulazione per A, si considera l'insieme delle funzioni $f : A \to \mathbb{R}$ che tendono ad $+\infty$ per x che tende a c, e si dice che una $f(x)$ tende a $+\infty$ "più velocemente" di una $g(x)$ se vale la condizione

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty;$$

si prova che questa condizione è equivalente alla condizione

$$\lim_{x \to c} \frac{g(x)}{f(x)} = 0^+,$$

che si legge dicendo che $g(x)$ tende a $+\infty$ "più lentamente" di $f(x)$; si prova inoltre che se $f(x)$ tende a $+\infty$ poù velocemente di $g(x)$ e $g(x)$ tende a $+\infty$ poù velocemente di $h(x)$ allora $f(x)$ tende a $+\infty$ poù velocemente di $h(x)$.

Esempi. In tutti gli esempi seguenti, si considerano limiti per $x \to +\infty$.

(1) Considero

$$x - \log_2 x = *;$$

osservo che si ha una forma di indecisione $+\infty - \infty$; so che x tende a $+\infty$ più velocemente di $\log_2 x$; per usare questa informazione raccolgo x, e ottengo

$$* = x[1 - (\log_2 x)/x] = *$$

si ha: $(\log_2 x)/x \to 0$, $[1 - (\log_2 x)/x \to 0] \to 1$, $x \to +\infty$; dunque

$$* \to +\infty.$$

(2) Considero

$$\frac{3^x + 5x}{2^x + 7x} = *;$$

osservo che si ha una forma di indecisione ∞/∞; so che gli esponenziali tendono a $+\infty$ più velocemente delle potenze; per usare questa informazione raccolgo gli esponenziali, e ottengo

$$* = \frac{3^x(1 + 5\frac{x}{3^x})}{2^x(1 + 7\frac{x}{2^x})} = (\frac{3}{2})^x \frac{1 + 5\frac{x}{3^x}}{1 + 7\frac{x}{2^x}} = *$$

si ha: $(1 + 5/3^x)/(1 + 7/2^x) \to 1$, $(3/2)^x \to +\infty$ (poichè $(3/2) > 1$), dunque

$$* \to +\infty.$$

(3) Considero

$$\frac{2^x}{x} - \frac{x^2}{\log_3 x} = *;$$

osservo che si ha una forma di indecisione $+\infty - \infty$; provo a raccogliere $2^x/x$, e ottengo

$$* = \frac{2^x}{x}[1 - \frac{x^3}{2^x \log_3 x}] = *$$

si ha: $[1 - x^3/(2^x \log_3 x)] \to 1$, $(2^x/x) \to +\infty$; dunque

$$* \to +\infty.$$

Relazione fra limiti a $+\infty, 0, -\infty$

Nel paragrafo precedente abbiamo enunciato un teorema sul cofronto fra funzioni per $x \to +\infty$. Sarebbe utile poter trasportare queste informazioni per confrontare funzioni di questi tipi per x che tende ad altri punti limite. Ciò si può fare con una certa generalità. Dalla definizione dei vari tipi di limite segue che

Proposizione 1 *Sia $f : A \to \mathbb{R}$. Allora*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(-x)$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(\frac{1}{x})$$
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(\frac{1}{x})$$

Per ciascuna di queste uguaglianze si afferma che: (1) il limite di sinistra ha senso se e solo se il limite di destra ha senso, e in caso affermativo: (2) il limite di sinistra esiste se e solo se il limite di destra esiste, e in caso affermativo: (3) i due limiti sono uguali.

Esempi.

(1) Considero
$$\lim_{x\to-\infty} x\, 2^x = *$$
si ha una forma di indecisione $\infty \cdot 0$; sposto il limite a $+\infty$, ed ottengo
$$* = \lim_{x\to+\infty} -x2^{-x} = \lim_{x\to+\infty} -x/2^x = 0^-.$$

(2) Considero
$$\lim_{x\to 0^+} x\ \log_2 x = *$$
si ha una forma di indecisione $0 \cdot \infty$; sposto il limite a $+\infty$, ed ottengo
$$* = \lim_{x\to+\infty} (1/x) \log_2 (1/x) = \lim_{x\to+\infty} -(\log_2 x)/x = 0^-.$$

(3) Considero
$$\lim_{x\to 0^+} \cos(1/x) = *;$$
è piuttosto chiaro che questo limite non esiste ... ma forse è ancora più chiaro che
$$* = \lim_{x\to+\infty} \cos(x) \quad \text{non esiste.}$$