Lezione 18 - 2; Algebra lineare, 17.10.2017

Spazi Vettoriali Euclidei

Spazio Vettoriale Euclideo $\mathbb{R}^n$

Prodotto scalare su $\mathbb{R}^n$. Per ogni due vettori $a, b \in \mathbb{R}^n$, si defnisce il loro prodotto scalare $a \cdot b$ come la soma dei prodotti delle componenti di a per le cosrrispondenti componenti di b; in simboli, per $a = (a_i)_1^n$ e $b = (b_i)_1^n$, si pone

$$a \cdot b = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i;$$

in particolare

$$a \cdot a = \sum_{i=1}^{n} a_i^2.$$

Il prodotto scalare possiede le seguenti proprietà: per ogni $a, b, c \in \mathbb{R}^n$ ed ogni $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{l}
a \cdot b = b \cdot a \\
(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c, \qquad a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \\
(\alpha a) \cdot b = a \cdot (\alpha b) = \alpha(a \cdot b) \\
a \cdot a \geq 0; \quad a \cdot a = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = \underline{0}
\end{array}$$

Le prime tre proprietà derivano dalle proprietà delle sommatorie; la quarta deriva dalle proprietà dell'ordine rispetto alle operazioni sui numeri reali.

Ortogonalità e Norma A partire dal prodotto scalare, si definiscono nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ la relazione di ortogonalità fra due vettori e la nozione di lunghezza o "norma" di un vettore.

Definizione 1 *Per ogni due vettori $a, b \in \mathbb{R}^n$, si dice che a è ortogonale a b, e si scrive $a \perp b$, se il prodotto scalare di a per b è zero:*

$$a \perp b \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot b = 0$$

Dalle proprietà del prodotto scalare segue in particolare che: (1) se un primo vettore è ortogonale ad un secondo vettore allora il secondo vettore è ortogonale al primo vettore, e dunque si potrà dire "due vettori sono fra loro ortogonali"; (2) il vettore nullo è ortogonale a sè stesso, è ortogonale ad ogni altro vettore, ed è l'unico vettore con queste proprietà. I vettori canonici di $\mathbb{R}^n$ risultano essere a due a due ortogonali: $e_i \perp e_j = 0$ per ogni $i \neq j$.

Definizione 2 *Si dice lunghezza, o norma, di un vettore $a \in \mathbb{R}^n$, e si scrive $\|a\|$, la radice quadrata del prodotto scalare di a con sè stesso:*

$$\|a\| = \sqrt{a \cdot a}.$$

I vettori canonici di $\mathbb{R}^n$ risultano avere tutti norma 1: $\|e_i\| = 1$ per ogni $i = 1, \ldots, n$. Un vettore $a \in \mathbb{R}^n$ si dice "versore" se $\|a\| = 1$. Ogni vettore $a \in \mathbb{R}^n$ con $a \neq \underline{0}$ si può scrivere in uno ed un solo modo come prodotto di uno scalare positivo per un versore $\bar{a}$, e lo scalare risulta essere la norma di a. Dunque $a = \|a\|\bar{a}$; equivalentemente, $\bar{a} = \frac{1}{\|a\|}a$.

Si dimostra che la funzione norma (e la relazione di ortognalità) in $\mathbb{R}^n$ soddisfano le seguenti proppprietà: per ogni $a, b \in \mathbb{R}^n$ ed ogni $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
&\|a\| \geq 0; \qquad \|a\| = 0 \;\Leftrightarrow\; a = \underline{0} \\
&\|\alpha a\| = |\alpha| \|a\| \\
&\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\| && \text{(Disuguaglianza Triangolare)} \\
&a \perp b \;\Leftrightarrow\; \|a + b\|^2 = \|a\|^2 + \|\alpha b\|^2 && \text{(Teorema di Pitagora)}
\end{aligned}$$

Di seguito proviamo il Teorema di Pitagora. Per le proprietà del prodotto scalare si ha

$$(a + b) \cdot (a + b) = a \cdot a + a \cdot b + b \cdot a + b \cdot b = a \cdot a + 2a \cdot b + b \cdot b;$$

questa uguaglianza si può scrivere

$$\|a + b\|^2 = \|a\|^2 + 2a \cdot b + \|b\|^2;$$

da ciò segue il Teorema di Pitagora in quanto per definizione si ha $a \perp b$ se e solo se $a \cdot b = 0$.

Qualche aspetto di Geometria Euclidea $n-$dimensionale

Tutti i fatti che abbiamo visto e le nozioni che abbiamo dato negli spazi vettoriali euclidei di dimensione 2 e 3 valgono in ciascun spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^n$. Di seguito ne illustriamo un paio.

Proiezioni ortogonali La nozione di proiezione ortogonale di un vettore su un vettore non nullo, la relativa formula, e la nozione di coefficiente di Fourier, si possono dare in ciascun spazio $\mathbb{R}^n$. Vale infatti la

Proposizione 1 *Siano $a, b \in \mathbb{R}^n$, con $a \neq \underline{0}$. Allora esistono e son univocamente determinati due vettori $p, q \in \mathbb{R}^n$ tali che*

$$b = p + q; \quad p \text{ multiplo scalare di } a; \quad q \perp a.$$

Si dice che p è la proiezione ortogonale di b su a e si scrive

$$p = \mathrm{pr}_a(b).$$

Inoltre, per questo vettore si ha la formula

$$\text{pr}_a(b) = \frac{a \cdot b}{a \cdot a}\, a;$$

lo scalare $(a \cdot b)/(a \cdot a)$ *si dice coefficiente di Fourier di* b *rispetto ad* a.

Osserviamo che gli stessi passaggi coi quali avevamo ricavato la formula per la proiezione ortogonale in $\mathbb{R}^2$ continuano a valere per ricavare la formula per la proiezione ortogonale in $\mathbb{R}^2$, in quanto avevamo usato solo le proprietà del prodotto scalare in $\mathbb{R}^2$, che contiuano a valere per il prodotto scalare in $\mathbb{R}^n$.

Esempio. In $\mathbb{R}^5$ la proiezione ortogonale del vettore $b = (2,3,7,1,2)$ sul vettore $u = (1,1,1,1,1)$ è data da

$$\text{pr}_u(b) = \frac{u \cdot b}{u \cdot u}\, u = \frac{15}{5}\,(1,1,1,1,1) = (3,3,3,3,3).$$

Esempio. In $\mathbb{R}^n$ la proiezione ortogonale di un vettore $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ sul vettore $u = (1,1,\ldots,1)$ è data da

$$\text{pr}_u(b) = \frac{u \cdot b}{u \cdot u}\, u = \frac{\sum_{i=1}^n b_i}{n}\,(1,1,\ldots,1) = \mu_b\,(1,1,\ldots,1) = (\mu_b, \mu_b, \ldots, \mu_b).$$

dove μ_b è la media aritmetica delle componenti di b.

Ortogonalità e Indipendenza Lineare Per due vettori non nulli del piano, la proprietà di essere fra loro ortogonali implica la proprietà di essere fra loro linearmente indipendenti; allo astesso modo, per due o tre vettori non nulli delo spazio, la proprietà di essere fra loro a due a due ortogonali implica la proprietà di essere fra loro linearmente indipendenti. Questo fatto vale in ogni dimensione.

Teorema 1 *Siano dati* $v_1, \ldots, v_m$ *vettori di* $\mathbb{R}^n$, *tali che* $v_i \neq \underline{0}$ *per ogni* i *e* $v_i \perp v_j$ *per ogni* $i \neq j$. *Allora* $v_1, \ldots, v_m$ *sono linearmente indipendenti.*

Dim. Consideriamo una combinazine lineare dei vettori $v_1, \ldots, v_m$ che risulti uguale al vettore nullo

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_i v_j = \underline{0}.$$

Proviamo che per ogni indice $i = 1, \ldots, m$ si deve avere $\alpha_i = 0$.
Moltiplichiamo scalarmente entrambi i membri dell'uguaglianza per il vettore v_i, ed otteniamo l'uguaglianza

$$v_i \cdot \left[\sum_{j=1}^{m} \alpha_i v_j\right] = v_i \cdot \underline{0};$$

applichiamo al I membro le proprietà del prodotto scalare e calcoliamo il secondo membro, ed otteniamo

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_i (v_i \cdot v_j) = 0;$$

essendo $v_i \perp v_j$ cioè $v_i \cdot v_j = 0$ per ogni $i \neq j$, si ha che tutti i termini della sommatoria sono nulli, tranne l'i-mo, e si ottiene

$$\alpha_i (v_i \cdot v_i) = 0;$$

essendo $v_i \neq \underline{0}$ cioè $(v_i \cdot v_i) \neq 0$, si ha infine che $\alpha_i = 0$.