Lezione 19; Analisi, 18.10.2017

Limiti

Operazioni Aritmetiche

Elevamento a potenza L'operazione di limite si comporta bene rispetto all'operazione di elevamento di una costante ad esponente funzione.

Proposizione 1 *Per l'eventuale limite della funzione $b^{f(x)}$, dove b è una costante > 0, in funzione del limite della funzione $f(x)$ vale la seguente tabella dove: gli indici di riga sono i tre possibili tipi di costanti e gli indici di colonna sono i tre possibili limiti della funzione $f(x)$*

	$+\infty$	β	$-\infty$
$b > 1$	$+\infty$	b^β	0^+
$b = 1$	1	1	1
$1 > b > 0$	0^+	b^β	$+\infty$

Esempio. Per la funzione $2^{1/x}$ $(x \in \mathbb{R}_{\neq 0})$ si ha

$$\lim_{x\to+\infty} 2^{1/x} = 1^+, \quad \lim_{x\to 0^+} 2^{1/x} = +\infty, \quad \lim_{x\to 0^-} 2^{1/x} = 0^+, \quad \lim_{x\to-\infty} 2^{1/x} = 1^-$$

La funzione ha dunque l'asintoto orizzontale $y = 1$ sia per $x \to +\infty$ che per $x \to -\infty$ e l'asintoto verticale $y = 0$ per $x \to 0^+$. Si lascia al lettore di dare una rappresentazione del grafico della funzione.

Consideriamo ora una funzione elevata ad un esponente funzione

$$[f(x)]^{g(x)} \qquad (x:\ \exists f(x);\ \exists g(x); f(x) > 0).$$

Fissata una costante $b > 0$, possiamo scrivere

$$f(x) = b^{\log_b [f(x)]}$$

e, applicando le proprietà delle potenze, possiamo scrivere

$$[f(x)]^{g(x)} = b^{g(x)\log_b [f(x)]}.$$

Dunque, ogni funzione data da una funzione elevata a funzione si può riscrivere come una funzione data da una costante (positiva qualsiasi) elevata ad una funzione. Di conseguenza, lo studio dei limiti di funzioni elevate a funzioni si riconduce allo studio dei limiti di costanti elevate a funzioni.

Esempio. Consideriamo la funzione

$$x^{1/x}, \quad (x > 0)$$

per $x \to +\infty$. (Si lascia al lettore di cercare di farsi un'idea sul comportamento della funzione per $x \to +\infty$). Possiamo scrivere

$$x^{1/x} = \left[2^{\log_2 x}\right]^{1/x} = 2^{(\log_2 x)/x}$$

osservare che $(\log_2 x)/x \to 0^+$ e dedurre dalla proposizione precdente che

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x^{1/x}\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[2^{(\log_2 x)/x}\right] = 1^+.$$

Composizione

L'operazione di limite si comporta abbastanza bene rispetto all'operazione di composizione di funzioni.

Proposizione 2 *Siano date:*
(1) una funzione f ed un punto c di accumulazione per il suo dominio e si supponga che $\lim_{x\to c} f(x) = L$;
(2) una funzione g tale che L sia un punto di accumulazione per il suo dominio e si supponga che esista $\lim_{x\to L} g(x)$ *e che c sia un punto di accumulazione per il dominio di $g \circ f$.*
Allora, se non si verifica la circostanza sotto specificata, si ha

$$\lim_{x\to c} g(f(x)) = \lim_{x\to L} g(x).$$

Circostanza critica:
- esiste $f(L)$ e $\lim_{x\to L} f(x) \neq f(L)$;
- in ogni intorno I_c di c c'è un punto $x \neq c$ tale che $f(x) = L$.

Per il tipo di funzioni che noi considereremo, la circostanza critica di sopra è piuttosto sporadica. Ad esempio, essa non si verifica se g è una funzione ottenuta mediante operazioni aritmetiche da funzioni potenza, esponenziali, logaritmiche oppure se $L = \infty$. Il lettore curioso di vedere un esempio in cui si verifica questa circostanza critica è rimandato all'Appendice.

Esempio. Consideriamo la funzione

$$\log_2\left[\frac{x}{1-x}\right], \qquad (x \in]0,1[).$$

Si ha

$$\lim_{x\to1^-}\log_2\left[\frac{x}{1-x}\right] = \lim_{x\to+\infty}\log_2 x = +\infty$$
$$\lim_{x\to0^+}\log_2\left[\frac{x}{1-x}\right] = \lim_{x\to0^+}\log_2 x = -\infty$$

Funzioni Continue, Funzioni Elementari

Definizione 1 *Sia $f : A \to \mathbb{R}$ e c un punto che appartenga ad A e sia di accumulazione per A. Si dice che f è continua in c se*

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c).$$

Dalle proposizioni sui comportamento dell'operazione di limite rispetto alle operazioni sulle funzioni, segue il

Teorema 1 *Sia f una funzione costruita medinate operazioni aritmetiche (somma, prodotto, divisione) e composizione a partire da funzioni continue in ciascun punto del loro dominio. Allora anche f è continua in ciascun punto del suo dominio.*

Abbiamo visto che ciascuna delle funzioni potenza, esponenziali, logaritmiche, trigonometriche è continua nel suo dominio di definizione. Una funzione che si può ottenere mediante operazioni aritmetiche e composizione a partire da funzioni potenza, esponenziali, logaritmiche e trigonometriche si dice "funzione elementare". Si ha dunque che

Proposizione 3 *Ogni funzione elementare è continua in ciascun punto del suo dominio di definizione.*

Limiti Notevoli

Numero di Nepero Sia $c = 1$ un capitale che viene rivalutato un tasso di interesse del 100% annuale.
Se c viene rivalutato con cadenza annuale, alla fine dell'anno si avrà $c'_1 = 2$;
se c viene rivalutato con cadenza semestrale, cioè se viene rivalutato al termine di ciascun semestre a un tasso semestrale del 50%, alla fine dell'anno si avrà $c'_2 = (1 + 1/2)^2 = 9/4 = 2.25$;
se c viene rivalutato con cadenza quadrimestrale, cioè se viene rivalutato al termine di ciascun quadrimestre a un tasso quadrimestrale del $33.\overline{3}$%, alla fine dell'anno si avrà $c'_2 = (1 + 1/3)^3 = 64/27 \cong 2.37$;
...
Siamo così condotti a considerare la successione

$$(1 + \frac{1}{n})^n, \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

e più in generale la funzione

$$(1 + \frac{1}{x})^x, \quad (x \in \mathbb{R}_{>0})$$

e il suo eventuale limite per $x \to +\infty$. Si prova il

Teorema 2 *La funzione* $(1+1/x)^x$, *(*$x \in \mathbb{R}_{>0}$*) è crescente e superiomente limitata; dunque esiste finito il suo limite per* $x \to +\infty$*; questo limite si dice numero di Nepero e si indica con* e. *In breve, si pone*

$$\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x = \mathrm{e}.$$

l'approssimazione di e ai primi 10 decimali è

$$\mathrm{e} = 2.7182818284\ldots$$

Al posto di "esponenziale in base e" e di "logaritmo in base e" si dice in breve "esponenziale" e "logaritmo"; al posto di $\exp_{\mathrm{e}}(x)$ e $\log_{\mathrm{e}} x$. si scrive $\exp(x)$ e $\log x$.

Esponenziale e Logaritmo, Seno Dal limite

$$\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x = \mathrm{e},$$

mediante cambiamenti di variabili, si ottengono i limiti

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = 1$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x} = 1$$

(Ciascuno dei due limiti, in prima battuta, è una forma di indecisione del tipo $0/0$) Si lascia al lettore farsi un'idea del significato geometrico di queste informazioni visualizzando simultaneamente con maxima i grafici $y = \log(1+x)$, $y = x$, $y = (\mathrm{e}^x - 1)$ nelle vicinaze dell'origine $(0,0)$. Questo significato verrà stabilito e giustificato in seguito dopo l'introduzione del concetto derivata di una funzione in un punto e di retta tangente al grafico di una funzione in un punto.

Variazioni. Di seguito mostriamo come trattare limiti di funzioni simili a quelle di sopra.
(1) Consideriamo

$$\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{x} = *$$

Riscriviamo

$$* = \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x\log 2}-1}{x\log 2}\ \log 2$$

Osserviamo

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x\log 2}-1}{x\log 2} = \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x} = 1;$$

Deduciamo

$$* = 1\cdot\log 2 = \log 2.$$

(2) Consideriamo

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x} = *$$

Riscriviamo

$$* = \lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x^2} \, x$$

Osserviamo

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{x} - 1}{x} = 1; \qquad \lim_{x \to 0} x = 0$$

Deduciamo

$$* = 1 \cdot 0 = 0$$

Seno Con considerazioni di geometria elementare si prova che

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Questo limite, in prima battuta, è una forma di indecisione del tipo $0/0$. Questa affermazione può essere interpretata dicendo che "la lunghezza di una (semi)corda e la lunghezza del (semi)arco associato tendono a zero allo stesso modo".

Appendice

Consideriamo la funzione

$$h : \mathbb{R}_{\neq 0} \to \mathbb{R}, \quad h(x) = \delta_3(3 + x \sin(\pi/x)),$$

dove

$$\delta_3(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 3 \\ 0 & \text{se } x \neq 3. \end{cases} .$$

Da una parte si ha

$$\lim_{x \to 0} (3 + x \sin(\pi/x)) = 3, \quad \lim_{x \to 3} \delta_3(x) = 0.$$

Dall'altra parte si ha

$$\delta_3(3 + x \sin(\pi/x)) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = \pm 1, \ \pm 1/2, \ \pm 1/3, \dots \\ \text{non definita} & \text{se } x = 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e

$$\lim_{x \to 0} \delta_3(3 + x \sin(\pi/x)) \quad \text{non esiste.}$$

Dunque non e' vero che

$$\lim_{x \to 0} \delta_3(3 + x \sin(\pi/x)) = \lim_{x \to 3} \delta_3(x).$$