Lezione 20; Algebra Lineare, 18.10.2017

Determinanti

Determinante di matrici 2×2 e 3×3.

Determinante di matrici 2×2 Il determinante di una matrice quadrata di tipo 2×2 ad elementi reali è il numero reale dato dalla differenza fra il prodotto degli elementi sulla diagonale discendente e il prodotto degli elementi sulla diagonale acendente; il determinante di una matrice si indica sostituenedo ciascuna delle due parentesi quadre che delimitano la matrice con una barra verticale; se una matrice è indicata da un simbolo, allora il suo determinante è indicato da quel simbolo fra barre verticali (si usa anche indicare il determinante di una matrice in altri modi, ad esempio premettendo la scritta det alla matrice, o al simbolo che la rappresenta).

Ad esempio, il determinante della matrice

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

è il numero reale $2 \cdot 5 - 4 \cdot 3 = -2$, e si pone

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -2.$$

In generale, il determinante di una matrice

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$$

è dato da

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

Il determinante ha un interessante significato geometrico:

> identificato $\mathbb{R}^2$ con l'insieme $\mathcal{G}_o^2$ dei vettori nel piano, ed indicati con i e j i vettori canonici di $\mathbb{R}^2$, il determinante di una matrice di tipo 2×2 con prima colonna a e seconda colonna b è, a meno del segno, la misura dell'area del parallelogramma individuato da a e b rispetto all'area del quadrato individuato da i e j.

Da questo significato si deduce che

> il determinante di una matrice di tipo 2×2 con prima colonna a e seconda colonna b è diverso da zero se a e b sono linearmente indipendenti ed è uguale a zero se a e b sono linearmente dipendenti.

Qui sotto mostriamo come si può rendere conto direttamente del fatto che il determinante di una matrice di tipo 2×2 con prima colonna a e seconda colonna b è uguale a zero se a e b sono linearmente dipendenti. Supposto che $a = (a_1, a_2)$ e $b = (b_1, b_2)$ siano linearmente dipendenti, si ha che uno dei due si può ottenere come multiplo scalare dell'altro. Consideriamo il caso in cui b si possa ottenere come multiplo scalare $b = \beta a$ di a (l'altro caso è analogo). Si ha

$$\begin{vmatrix} a_1 & \beta a_1 \\ a_2 & \beta a_2 \end{vmatrix} = a_1 \beta a_2 - a_2 \beta a_1 = 0.$$

Determinante di matrici 3×3 Il determinante di una matrice 3×3 ad elementi reali è un numero reale che si può ottenere in sei modi diversi, tre modi a partire da ciascuna delle tre colonne, e tre modi a partire da ciascuna delle tre righe. Questi modi si dicono "sviluppi" del determinante secondo le varie sue colonne e righe. Di seguito illustriamo su un esempio come si ottengono gli sviluppi rispetto alle colonne, ed il fatto che tutti questi sviluppi danno lo stesso risultato. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 9 \end{bmatrix}.$$

Diciamo "matrice complementare" di un elemento la matrice 2×2 ottenuta cancellando la riga e la colonna sulle quali sta l'elemento, e diciamo "complemento" di un elemento il determinante della sua matrice complementare.

(1) lo sviluppo del determinante rispetto alla prima colonna è il numero reale dato dalla somma algebrica, con segni +,-,+, dei prodotti del primo, secondo, terzo elemento della prima colonna per i rispettivi complementi:

$$+2 \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 9 & 9 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 9 & 9 \end{vmatrix} + 8 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-9) - 5 \cdot (-9) + 8 \cdot (-3) = 3$$

(2) lo sviluppo del determinante rispetto alla seconda colonna è il numero reale dato dalla somma algebrica, con segni -,+,-, dei prodotti del primo, secondo, terzo elemento della seconda colonna per i rispettivi complementi:

$$-3 \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 6 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 9 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = -3 \cdot (-11) + 6 \cdot (-14) - 9 \cdot (-6) = 3$$

(3) lo sviluppo del determinante rispetto alla terza colonna è il numero reale dato dalla somma algebrica, con segni +,-,+, dei prodotti del primo, secondo, terzo elemento della terza colonna per i rispettivi complementi:

$$+4 \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 7 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 9 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-3) - 7 \cdot (-6) + 9 \cdot (-3) = 3$$

Lo sviluppo rispetto alla prima colonna del determinte di una matrice

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

è dato dal polinomio seguente (e gli altri sviluppi danno scritture diverse dello stesso polinomio).

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} &= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1) \\ &= a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1. \end{aligned}$$

Osserviamo che

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & k \end{vmatrix} = aek.$$

Il determinante ha un interessante significato geometrico:

> identificato $\mathbb{R}^3$ con l'insieme $\mathcal{G}_o^3$ dei vettori nel piano, ed indicati con i, j, k i vettori canonici di $\mathbb{R}^3$, il determinante di una matrice di tipo 3×3 con prima, seconda e terza colonna a, b, c è, a meno del segno, la misura del volume del parallelepipedo individuato da a, b, c rispetto al volume del cubo individuato da i, j, k.

Da questo significato si deduce che

> il determinante di una matrice di tipo 3×3 con prima, seconda e terza colonna a, b, c è diverso da zero se a, b, c sono linearmente indipendenti ed è uguale a zero se a, b, c sono linearmente dipendenti.

Matrice inversa Consideriamo una matrice A 2×2. Sapevamo che A è invertibile se e solo se le colonne di A sono linearmente indipendenti ed ora sappiamo che le colonne di A sono linearmente indipendenti se e solo se il determinante di A è diverso da zero. Dunque, A è invertibile se e solo se il determinante di A è diverso da zero. Esplicitamente

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{invertibile} \quad \text{se e solo se} \quad |A| = ad - cb \neq 0.$$

Sotto questa condizione, si ricava la seguenete formula per la matrice inversa

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} d/(ad-cb) & -b/(ad-cb) \\ -c/(ad-cb) & a/(ad-cb) \end{bmatrix},$$

in breve

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - cb} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Considerazioni simili valgono per una matrice A 3×3. In particolare, A è invertibile se e solo se il determinante di A è diverso da zero. Si ha ancora una formula per la matrice inversa di A, ma un po' più complicata.

Proprietà

Matrici 2×2 Una matrice 2×2 si può riguardare come la sequenza delle sue due colonne, ciascuna delle quali è un vettore di $\mathbb{R}^2$; poniamo

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} = [\, a \vdots b \,], \qquad a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \, b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix},$$

e consistentemente

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = |\, a \vdots b \,|.$$

Associando a ciascuna matrice 2×2 riguardata come sequenza di due colonne in $\mathbb{R}^2$ il suo determinante si ottiene una funzione

$$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad [\, a \vdots b \,] \mapsto |\, a \vdots b \,|.$$

Si verifica che questa funzione possiede le seguenti proprietà: per ogni $a, a', a'', b, b', b'' \in \mathbb{R}^2$ ed ogni $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
&|\, (a' + a'') \vdots b \,| = |\, a' \vdots b \,| + |\, a'' \vdots b \,| \\
&|\, a \vdots (b' + b'') \,| = |\, a \vdots b' \,| + |\, a \vdots b'' \,| \\
&|\, (\alpha a) \vdots b \,| = |\, a \vdots (\alpha b) \,| = \alpha |\, a \vdots b \,| \\
&|\, b \vdots a \,| = -|\, a \vdots b \,| \\
&|\, a \vdots a \,| = 0 \\
&|I_2| = |\, i \vdots j \,| = 1 \qquad (i, j \text{ vettori canonici di } \mathbb{R}^2).
\end{aligned}$$

Si può provare che la funzione determinante è l'unica funzione $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ che possiede queste proprietà. Vale un risultato analogo per le righe.

Matrici 3×3 Una matrice 3×3 si può riguardare come la sequenza delle sue tre colonne, ciascuna delle quali è un vettore di $\mathbb{R}^3$; poniamo

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} = [\, a \vdots b \vdots c \,], \qquad a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \, b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}, \, c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix},$$

e consistentemente

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = |\, a \vdots b \vdots c \,|.$$

Associando a ciascuna matrice 3×3 riguardata come sequenza di tre colonne in $\mathbb{R}^3$ il suo determinante si ottiene una funzione

$$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad [\, a \vdots b \vdots c \,] \mapsto |\, a \vdots b \vdots c \,|.$$

Si verifica che questa funzione determinante possiede le seguenti proprietà: per ogni $a, a', a'', b, b', \ldots, c'' \in \mathbb{R}^3$ ed ogni $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$|\, (a' + a'') \vdots b \vdots c \,| = |\, a' \vdots b \vdots c \,| + |\, a'' \vdots b \vdots c \,|$$

$$|\, a \vdots (b' + b'') \vdots c \,| = |\, a \vdots b' \vdots c \,| + |\, a \vdots b'' \vdots c \,|$$

$$|\, a \vdots b \vdots (c' + c'') \,| = |\, a \vdots b \vdots c' \,| + |\, a \vdots b \vdots c'' \,|$$

$$|\, (\alpha a) \vdots b \vdots c \,| = |\, a \vdots (\alpha b) \vdots c \,| = |\, a \vdots b \vdots (\alpha c) \,| = \alpha |\, a \vdots b \vdots c \,|$$

$$|\, b \vdots a \vdots c \,| = |\, c \vdots b \vdots a \,| = |\, a \vdots c \vdots b \,| = -|\, a \vdots b \vdots c \,|$$

$$|\, a \vdots a \vdots c \,| = |\, a \vdots b \vdots a \,| = |\, a \vdots b \vdots b \,| = 0$$

$$|I_3| = |\, i \vdots j \vdots k \,| = 1 \qquad (i, j, k \text{ vettori canonici di } \mathbb{R}^3)$$

Si può provare che la funzione determinante è l'unica funzione $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ che possiede queste proprietà. Vale un risultato analogo per le righe.

Una conseguenza di queste proprietà è che certe operazioni sulle colonne (o righe) di una matrice lasciano inalterato il valore del suo determinante. Fra queste, l'operazione principale è: "sommare ad una colonna un multipli scalare di unàltra colonna (analogamnte per le righe), Verifichiamo che l'operazione "sommare alla seconda colonna un multiplo scalare ddella prima colonna non altera il valore del determknante:

$$|\, a \vdots (b + \beta a) \vdots c \,| = |\, a \vdots b \vdots c \,| + \beta |\, a \vdots a \vdots c \,| = |\, a \vdots b \vdots c \,| + \beta \cdot 0 = |\, a \vdots b \vdots c \,|.$$

Vale un risultato analogo per le righe. Questo fatto può essere usato per semplificare il calcolo di un determinante.

Esempio.

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 3 & 9 & 27 \\ 4 & 16 & 64 \end{vmatrix} =$$

(alla seconda colonna sommo -2 per la prima colonna, e alla terza colonna sommo -4 per la prima colonna)

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 15 \\ 4 & 8 & 48 \end{vmatrix} =$$

(alla terza colonna sommo -5 per la seconda colonna)

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 4 & 8 & 8 \end{vmatrix} =$$

(sviluppo rispetto alla terza colonna)

$$8 \cdot 3 \cdot 2 = 48.$$

Di seguito usiamo proprietà del determinante per mostrare che se le colonne di una matrice 3×3 sono dipendenti allora il determinante della matrice è zero.

Sia data una matrice 3×3, siano $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ le sua colonne, e supponiamo che a, b, c siano linearmente dipendenti. Allora cè una delle tre colonne che si può ottenere come combinazione lineare delle altre due; consideriamo per fissare le idee che c si possa ottenere come $c = \alpha a + \beta b$. Allora

$$\begin{aligned} |\, a \vdots b \vdots c \,| &= |\, a \vdots b \vdots (\alpha a + \beta b) \,| \\ &= \alpha |\, a \vdots b \vdots a \,| + \beta |\, a \vdots b \vdots b \,| \\ &= \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Determinante di matrici $n \times n$

Una matrice $n \times n$ si può riguardare come la sequenza delle sue n colonne, ciascuna delle quali è un vettore di $\mathbb{R}^n$; poniamo

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = [\, a_1 \vdots \cdots \vdots a_n \,], \qquad a_i = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}, \; j = 1, \dots, n.$$

Teorema 1 *Sia n un intero positivo fissato. Esiste una ed una sola funzione*

$$\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad [\, a_1 \vdots \cdots \vdots a_n \,] \mapsto |\, a_1 \vdots \cdots \vdots a_n \,|$$

che possiede le seguenti proprietà: per ogni $j = 1, \dots, n$, ogni $a_j, a_j', a_j'' \in \mathbb{R}^n$ ed ogni $\alpha \in \mathbb{R}$,

$|\, (a_1' + a_1'') \vdots a_2 \vdots \cdots \vdots a_n \,| = |\, a_1' \vdots a_2 \vdots \cdots \vdots a_n \,| + |\, a_1'' \vdots a_2 \vdots \cdots \vdots a_n \,|$
analoghe altre (una per ciascuna colonna)

$|\, (\alpha a_1) \vdots a_2 \vdots \cdots \vdots a_n \,| = \alpha |\, a_1 \vdots a_2 \vdots \cdots \vdots a_n \,|$
analoghe altre (una per ciascuna colonna)

$|\, a_2 \vdots a_1 \vdots \cdots \vdots a_n \,| = -|\, a_1 \vdots a_2 \vdots \cdots \vdots a_n \,|$
analoghe altre (una per ciascun insieme di due colonne)

$|\, a \vdots a \vdots \cdots \vdots a_n \,| = 0$
analoghe altre (una per ciascun insieme di due colonne)

$$|I_n| = |\, e_1 \vdots e_2 \vdots \cdots \vdots e_n \,| = 1 \qquad (e_j \textit{vettori canonici di } \mathbb{R}^n).$$

Per ogni matrice $A = [\, a_1 \vdots a_2 \vdots \cdots \vdots a_n \,]$ $n \times n$, il numero reale $|A| = |\, a_1 \vdots a_2 \vdots \cdots \vdots a_n \,|$ si dice "determinante" di A.

Si dimostra il seguente

Teorema 2 *Per ogni matrice A $n \times n$ le seguenti proposizioni son equivalenti:*

- *le righe di A sono liearmente indipendenti;*
- *le colonn di A sono liearmente indipendenti;*
- *A è invertibile;*
- $|A| \neq 0$.

Una matrice che soddisfa una (e dunque tutte) queste proprietà si dice matrice "non singolare".