**Lezione 21, Algebra Lineare, 08.11.2017**

# Sistemi lineari

## Sistemi lineari di $n$ equazioni in $n$ incognite

### Rappresentazioni. Siststemi con una ed una sola soluzione

Ricordiamo che un'equazione lineare in $n$ incognte reali $x_1, \ldots, x_n$ è una uguaglianza della forma

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b, \quad \text{in breve} \quad \sum_{j=1}^{n} a_jx_j = b,$$

dove gli $a_j$ e $b$ sono numeri reali dati, detti rispettivamente coefficienti e termine noto. Una soluzione dell'equazione è una $n-$pla ordinata $s = (s_1, \ldots, s_n)$ di numeri reali che sostituiti alle corrispondenti incognite rende vera l'uguaglianza: $\sum_{j=1}^{n} a_js_j = b$.

Un sistema lineare di $n$ equazioni in $n$ incognite reali $x_1, \ldots, x_n$ è una sequenza di $n$ equazioni lineari in $x_1, \ldots, x_n$ :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}, \quad \text{in breve} \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad (i = 1, \ldots, n) \end{cases}$$

dove gli $a_{ij}$ e i $b_i$ sono numeri reali dati, detti rispettivamente coefficienti e termini noti. Una soluzione del sistema è una $n-$pla ordinata $s = (s_1, \ldots, s_n)$ di numeri reali che è soluzione di ciascuna equazione.

I dati che caratterizzano il sistema si possono rappresentare con la matrice che ha nelle varie righe i coefficienti e il termine noto delle varie equazioni ed ha nelle varie colonne i coefficienti delle varie incognite e infine i termini noti

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} & b_n \end{array}\right].$$

La sottomatrice degli $a_{ij}$ si dice "matrice dei coefficienti" e la colonna dei $b_i$ si dice "colonna dei termini noti".

**Rappresentazione vettoriale** Un sistema lineare di $n$ equazioni fra scalari nelle $n$ incognite scalari $x_1, \ldots, x_n$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

equivale ad una sola equazione fra vettori $n-$dimensionali nelle $n$ incognite scalari $x_1, \ldots, x_n$ :

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} x_1 + \cdots + \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix} x_n = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

che, posto

$$a_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix} \quad (j = 1, \ldots, n), \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

si può scrivere in breve

$$a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = b.$$

Osserviamo che il sistema ha soluzioni se e solo se la colonna dei termini noti $b$ si può ottenere come combinazione lineare delle colonne dei coefficienti $a_1, \ldots, a_n$.

**Rappresentazione matriciale** Un sistema lineare di $n$ equazioni fra scalari nelle $n$ incognite scalari $x_1, \ldots, x_n$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

equivale ad una sola equazione lineare matriciale in una sola incognita vettoriale

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

che, posto

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

si può scrivere in breve

$$Ax = b.$$

Osserviamo che si potrà trattare il sistema lineare nell'algebra delle matrici.

Da un sistema lineare di $n$ equazioni in $n$ incognite ci si aspetta che abbia una ed una sola soluzione, ma non è detto che ciò accada.

**Teorema 1** *Un sistema lineare di $n$ equazioni in $n$ incognite $Ax = b$ ($A$ matrice $n \times n$ e $b \in \mathbb{R}^n$) ha una ed una sola soluzione se e solo se la matrice $A$ è non singolare. In tal caso, la soluzione è data da $x = A^{-1}b$.*

Ricordiamo che una matrice quadrata $A$ è non singolare se e solo se soddisfa una delle condizioni equivalenti: (1) le colonne di $A$ son linearmente indipendenti; (2) le righe di $A$ son linearmente indipendenti; (3) $A$ è invertibile; (4) il determinante di $A$ è $\neq 0$.

**Dimostrazione parziale**
Proviamo che se la matrice $A$ è non singolare allora il sistema $Ax = b$ ha una ed una sola soluzione. Se $A$ è non singolare, allora $A$ è invertibile, e

$$Ax = b \quad \Rightarrow \quad A^{-1}Ax = A^{-1}b \quad \Rightarrow \quad I_n x = A^{-1}b \quad \Rightarrow \quad x = A^{-1}b.$$

Dunque l'unica possibile soluzione di $Ax = b$ è $x = A^{-1}b$. Sostituendo questo valoore di $x$ nell'equazione $Ax = b$ si ottiene l'uguaglianza

$$A(A^{-1}b) = b,$$

che è soddisfatta in quanto

$$A(A^{-1}b) = (AA^{-1})b = I_n b = b.$$

Non proviamo che se il sistema $Ax = b$ ha una ed una sola soluzione allora $A$ è non singolare.

**Esempi**

**Esempio** Consideriamo il sistema lineare di due equazioni nelle due incognite $x_1, x_2$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 11 \\ 5x_1 + 7x_2 = 13 \end{cases}$$

Il sistema ha rappresentazione vettoriale

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix} x_2 = \begin{bmatrix} 11 \\ 13 \end{bmatrix}.$$

Osserviamo che le due colonne coefficienti sono linearmente indipendenti, formano una bse di $\mathbb{R}^2$, e ogni colonna in $\mathbb{R}^2$ si può ottenere in uno ed un solo modo come loro combinazione lineare. Dunque, il sistema ha una ed una sola soluzione.
Il sistema ha rappresentazione matriciale

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 13 \end{bmatrix}.$$

Osserviamo che la matrice dei coefficienti ha determinante $2 \cdot 7 - 5 \cdot 3 = -1 \neq 0$. Dunque il sistema ha una ed una sola soluzione, data da

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 11 \\ 13 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 \\ 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -38 \\ 29 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

**Esempio** Consideriamo il sistema lineare di due equazioni nelle due incognite $x_1, x_2$ dipendente dal parametro $p$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 11 \\ 5x_1 + px_2 = 13 \end{cases}$$

Il sistema ha rappresentazione matriciale

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 13 \end{bmatrix}.$$

La matrice dei coefficienti è non singolare se e solo se

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & p \end{vmatrix} = 2p - 15 \neq 0 \quad \text{cioè} \quad p \neq 15/2.$$

Dal teorema segue che per $p \neq 15/2$ il sistema ha una ed una sola soluzione, data da

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & p \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 11 \\ 13 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2p-15} \begin{bmatrix} p & -3 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 \\ 13 \end{bmatrix} = \frac{1}{2p-15} \begin{bmatrix} 11p - 39 \\ 29 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

cioè

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{11p-39}{2p-15} \\ x_1 &= \frac{29}{2p-15}. \end{aligned}$$

Dal teorema segue ancora che per $p = 15/2$ il sistema o non ha soluzioni oppure ha più soluzioni. Si lascia al lettore di verificare quale delle due eventualità accade.

**Regola di Cramer**

Per il teorema precedente, l'unica soluzione di un sistema lineare di $n$ equazioni in $n$ incognite $Ax = b$ con $A$ matrice $n \times n$ non singolare, può essere ottenuta calcolando $A^{-1}b$. Questo modo di ottenere la soluzione risulta efficiente se si ha una formula efficiente per calcolare $A^{-1}$, o per il prodotto $A^{-1}b$. La regola di Cramer fornisce una formula per $A^{-1}b$ in termini di determinanti.

**Teorema 2** *Sia $Ax = b$ un sistema lineare di $n$ equazioni in $n$ incognite, con $A$ matrice $n \times n$ non singolare. Allora le componenti dell'unica soluzione del sistema sono date da*

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|}, \quad (i = 1, \ldots, n)$$

*dove $|A|$ è il determinante di $A$ ed $|A_i|$ è il determinante della matrice $A_i$ ottenuta da $A$ sostituendo alla $i-$ma colonna di $A$ la colonna dei termini noti $b$.*

**Idea della dimostrazione** Diamo la dimostrazione del teorema nel caso $n = 2$. Consideriamo un qualsiasi sistema lineare di due equazioni in due incognite $x_1, x_2$ che abbia matrice dei coefficienti non singolare

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}, \qquad \text{con} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

in breve

$$a_1x_1 + a_2x_2 = b \quad \text{con} \quad |a_1 \vdots a_2| \neq 0.$$

(1) Applicando ad entrambi i membri dell'uguaglianza la funzione

$$a \mapsto |a \vdots a_2| \quad (a \in \mathbb{R}^2),$$

otteniamo l'equazione scalare

$$|a_1x_1 + a_2x_2 \vdots a_2| = |b \vdots a_2|;$$

per le proprietà del determinante questa equazione si riscrive prima

$$|a_1 \vdots a_2|\ x_1 + |a_2 \vdots a_2|\ x_2 = |b \vdots a_2|$$

e poi

$$|a_1 \vdots a_2|\ x_1 = |b \vdots a_2|.$$

Essendo $|a_1 \vdots a_2| \neq 0$ si ottiene

$$x_1 = \frac{|b \vdots a_2|}{|a_1 \vdots a_2|}.$$

(2) Applicando ad entrambe i membri dell'uguaglianza la funzione

$$a \mapsto |a_1 \vdots a|, \quad (a \in \mathbb{R}^2)$$

otteniamo l'equazione scalare

$$|a_1 \vdots a_1x_1 + a_2x_2| = |a_1 \vdots b|;$$

per le proprietà del determinante questa equazione si riscrive prima

$$|a_1 \vdots a_1|\ x_1 + |a_1 \vdots a_2|\ x_2 = |a_1 \vdots b|$$

e poi

$$|a_1 \vdots a_2|\ x_2 = |a_1 \vdots b|.$$

Essendo $|a_1 \vdots a_2| \neq 0$ si ottiene

$$x_2 = \frac{|a_1 \vdots b|}{|a_1 \vdots a_2|}.$$

**Esempi**

**Esempio** Consideriamo il sistema lineare di due equazioni nelle due incognite $x_1, x_2$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 11 \\ 5x_1 + 7x_2 = 13 \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti ha determinante $2 \cdot 7 - 5 \cdot 3 = -1 \neq 0$. Dunque il sistema ha una ed una sola soluzione. Per la regola di Cramer, le componenti della soluzione sono date da

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 11 & 3 \\ 13 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}} = \frac{38}{-1} = -38$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 11 \\ 5 & 13 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}} = \frac{-29}{-1} = 29.$$

**Esempio** Consideriamo il sistema lineare di tre equazioni nelle tre incognite $x_1, x_2, x_3$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1 \\ 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 = 0 \\ 8x_1 + 9x_2 + 9x_3 = 0 \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti ha determinante

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 9 \end{vmatrix} = 3 \neq 0.$$

Dunque il sistema ha una ed una sola soluzione. Per la regola di Cramer, le componenti della soluzione sono date da

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 6 & 7 \\ 0 & 9 & 9 \end{vmatrix}}{3} = \frac{-9}{3} = -3$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & 7 \\ 8 & 0 & 9 \end{vmatrix}}{3} = \frac{11}{3}$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 0 \\ 8 & 9 & 0 \end{vmatrix}}{3} = \frac{-3}{3} = -1$$

**Caso singolare**

In questo paragrafo iniziamo a dare un'idea su un esempio della ragione per la quale un sistema lineare di $n$ equazioni in $n$ incognite $Ax = b$ con matrice dei coefficienti $A$ singolare non può avere una ed una sola soluzione.

**Esempio** Consideriamo il sistema lineare di due equazioni nelle due incognite $x_1, x_2$ dipendente dai parametri $p, b_1, b_2$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = b_1 \\ 5x_1 + px_2 = b_2 \end{cases}$$

Il sistema ha una ed una sola soluzione se e solo se

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & p \end{vmatrix} = 2p - 15 \neq 0 \quad \text{cioè} \quad p \neq 15/2.$$

Per $p = 15/2$ il sistema diviene

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = b_1 \\ 5x_1 + 15/2x_2 = b_2 \end{cases}$$

Osserviamo che

$$5x_1 + 15/2x_2 = 5/2(2x_1 + 3x_2).$$

Dunque: (1) se $b_2 = 5/2b_1$ allora la seconda equazione si deduce dalla prima, il sitema equivale alla singola equazione

$$2x_1 + 3x_2 = b_1$$

ed ha infinite soluzioni; (2) se $b_2 \neq 5/2b_1$ allora la seconda equazione è incompatibile con la prima, e il sistema non ha alcuna soluzione.

In generale, se un sistema lineare di $n$ equazioni in $n$ incognite $Ax = b$ ha matrice dei coefficienti $A$ singolare, allora c'è una delle righe di $A$ che si può scrivere come combinazione lineare delle altre, e si può scrivere il primo membro di una certa equazione come combinazione lineare dei primi membri delle altre equazioni; se il secondo membro di quella equazione si può ottenere allo stesso modo dai secondi mebri delle altre equazioni, allora quella equazione si può dedurre dalle altre equazioni, e si può togliere dal sistema ...; se il secondo membro di quella equazione non si può ottenere allo stesso modo dai secondi membri delle altre equazioni, allora il sistema è impossibile.