Lezione 21, Algebra Lineare, 15.11.2017

Sistemi Lineari

Rango di una matrice

Esempio principale, I

Considerata una matrice, ci poniamo il problema di determinare il massimo numero di colonne linearmente indipendenti e il massimo numero di righe linearmente indipendenti presenti in essa. Ad esempio, considiamo la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

ed indichiamo con $c_1, c_2, \cdots, c_6$ le sue colonne (vettori in $\mathbb{R}^4$), e con r_1, r_2, r_3, r_4 le sue righe (vettori in $\mathbb{R}^6$).

Massimo numero di colonne linearmente indipendenti. Osserviamo che ci possono essere al più 4 colonne linearmente indipendenti (ciascuna colonna è un vettore in $\mathbb{R}^4$ e in $\mathbb{R}^4$ ci possono essere al più 4 vettori linearmente indipendenti). Cerchiamo di costruire una sequenza linearmente indipedente di colonne che sia più numerosa possibile.

c_1 è lin. indip., in quanto $c_1 \neq 0$;

c_1, c_2 è lin. indip., in quanto $c_1 \neq 0$ e c_2 non è un multiplo scalare di c_1;

c_1, c_2, c_3 è lin. dip., in quanto $c_3 = -c_1 + c_2$;

c_1, c_2, c_4 è lin. indip., in quanto c_1, c_2 sono lin. indip. e c_4 non è combinazione lineare di c_1 e c_2 (lo si verifichi);

c_1, c_2, c_4, c_5 è lin. dip., in quanto c_5 è combinazione lineare di c_1, c_2, c_4 (lo si verifichi);

c_1, c_2, c_4, c_6 è lin. dip., in quanto c_6 è combinazione lineare di c_1, c_2, c_4 (lo si verifichi).

Abbiamo ottenuto una sequenza linearmente indipipendente c_1, c_2, c_4 di 3 colonne che non è contenuta in alcuna sequenza lin. indip. di 4 colonne. Possiamo congetturare che il massimo numero di colonne linearmente indipendenti sia 3, ma per affermarlo dovremmo considerare altri casi ...

Massimo numero di righe linearmente indipendenti. Cerchiamo di costruire una sequenza linearmente indipedente di righe che sia più numerosa possibile.

r_1 è lin. indip., in quanto $r_1 \neq 0$;

r_1, r_2 è lin. indip., in quanto $r_1 \neq 0$ e r_2 non è un multiplo scalare di r_1;

r_1, r_2, r_3 è lin. indip., in quanto r_1, r_2 sono lin. indip. e r_3 non è combinazione lineare di r_1 e r_2 (lo si verifichi);

r_1, r_2, r_3, r_4 è lin. dip., in quanto $r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 0$.
Abbiamo visto che c'è una sequenza linearmente indipendente di 3 righe, e che la sequenza di tutte e 4 le righe è linearmente dipendente. Possiamo affermare che il massimo numero di righe linearmente indipendenti è 3.

Sorgono dunque le seguenti domande: (1) se in una matrice esiste una sequenza linearmente indipendente di un certo numero di colonne che non è contenuta strettamente in alcuna sequenza linearmente indipendente di colonne, è vero che quel numero è il massimo numero di colonne linearmente indipendenti? (2) e per le righe? (3) è sempre vero che il massimo numero di colonne linearmente indipedenti e il massimo numero di righe linearmente indipedenti sono uguali?

Rango di una matrice, I

Alle domande poste risponde il seguente

Teorema 1 *Per ciascuna matrice A e ciascun numero naturale h le seguenti asserzioni sono equivalenti:*

1 *il massimo numero di colonne linearmente indipendenti di A è h;*

2 *esiste una sequenza linearmente indipendente di h colonne di A che non è contenuta in alcuna sequenza linearmente indipendente di $h + 1$ colonne di A;*

1′ *il massimo numero di righe linearmente indipendenti di A è h;*

2′ *esiste una sequenza linearmente indipendente di h righe di A che non è contenuta in alcuna sequenza linearmente indipendente di $h + 1$ righe di A.*

Il numero h che verifica una (e dunque tutte) le asserzioni si dice "rango" di A e si indica con $\rho(A)$.

Non diamo la dimostrazione.
Osserviamo che, se A ha tipo $m \times n$, allora il rango di A è minore-uguale sia ad m che ad n, in breve:

$$\rho(A) \leq \min(m, n).$$

Esempio. Consideriamo di nuovo la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Per al Teorema e la Definizione data, in base a quanto visto considerando le sue colonne, o equivalentemente in base a quanto visto considerando le sue righe, possiamo affermare che la matrice ha rango 3:

$$\rho(A) = 3.$$

Esempio. Consideriamo le matrici di tipo 2×3. I possibili valori del rago di queste matrici son $0, 1, 2$.

- C'è una sola matrice di rango 0, ed è la matrice nulla:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

- Le matrici di rango 1 sono tutte e sole quelle della forma

$$\begin{bmatrix} \alpha a & \alpha b & \alpha c \\ \beta a & \beta b & \beta c \end{bmatrix},$$

con $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ e $(a, b, c) \neq (0, 0)$.

- Le matrici di rango 2 sono tutte e sole quelle della forma

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix},$$

con $(a, b, c), (d, e, f)$ linearmente indipendenti.

Sottomatrici

Considerata una matrice, comunque scelto un insieme di righe e un insieme di colonne, si ha che gli elementi comuni a tali insiemi formano una nuova matrice; le matrici così ottenute si dicono sottomatrici della matrice data. Formalmente, le sottomatrici di una data matrice $A = [A_{ij}]$ di tipo $m \times n$, sono le matrici

$$A_{i_1,\dots,i_p;\ j_1,\dots,j_q} = \begin{bmatrix} A_{i_i j_1} & \cdots & A_{i_i j_q} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{i_p j_1} & \cdots & A_{i_p j_q} \end{bmatrix},$$

dove $1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq m$ e $1 \leq j_1 < \cdots < j_q \leq n$. Ad esempio, consideriamo la matrice 3×4

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & \ell \end{bmatrix}.$$

Alcune sottomatrici di A sono

$$A_{1,2;\ 1,2} = \begin{bmatrix} a & b \\ e & f \end{bmatrix}, \quad A_{1,3;\ 1,4} = \begin{bmatrix} a & d \\ i & \ell \end{bmatrix}, \quad A_{1,2;\ 1,2,4} = \begin{bmatrix} a & b & d \\ e & f & h \end{bmatrix}.$$

Nel seguito, ci interesseranno principlamente le sottomatrici quadrate di una matrice. In breve, al posto di dire che "matrice di tipo $h \times h$" diremo "matrice di ordine h".

Esempio principale, II

Considerata una matrice, ci poniamo il problema di determinare il massimo ordine di una sua sottomatrice non singolare. Ad esempio, consideriamo di nuovo la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix},$$

e procediamo volutamente senza usare le informazioni già ottenute su di essa. Il massimo ordine di una sottomatrice non singolare di A è al più 4 (per il solo fatto che non ci sono sottomatrici quadrate di ordine superiore a 4). Cerchiamo di costruire una sottomatrice non singolare che abbia ordine più grande possibile.
- Consideriamo le sottomatrici di ordine 2 e fra di esse scegliamo $A_{1,2;\,1,2}$; si ha

$$|A_{1,2;\,1,2}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

- Consideriamo le sottomatrici di ordine 3 che contengono $A_{1,2;\,1,2}$ e fra di esse scegliamo $A_{1,2,3;\,1,2,3}$; si ha

$$|A_{1,2,3;\,1,2,3}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

- Consideriamo di nuovo le sottomatrici di ordine 3 che contengono $A_{1,2;\,1,2}$ e fra di esse scegliamo $A_{1,2,3;\,1,2,4}$; si ha

$$|A_{1,2,3;\,1,2,4}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

- Si verifica che tutte le sottomatrici di ordine 4 che contengono $A_{1,2,3;\,1,2,4}$, cioè $A_{1,2,3,4;\,1,2,3,4}$, $A_{1,2,3,4;\,1,2,4,5}$, $A_{1,2,3,4;\,1,2,4,6}$, hanno determinante $= 0$.

Abbiamo ottenuto una sottomatrice non singolare $A_{1,2,3;\,1,2,4}$ di ordine 3 che non è contenuta in alcuna sottomatrice non singolare di ordine 4. Possiamo congetturare che il massimo ordine di di una sottomatrice non singolare sia 3, ma per affermarlo dovremmo considerare altri casi ...

Si può verificare che tutte le sottomatrici di ordine 4 sono singolari. Dunque, il massimo ordine di una sottomatrice non siongolare di A è uguale 3, che a sua volta è uguale al rango di A.

Rango di una matrice, II

Quanto visto nel paragrafo precedente non è un caso. Vale il

Teorema 2 *Per ciascuna matrice A e ciascun numero naturale h le seguenti asserzioni sono equivalenti:*

1 *il massimo ordine di una sottomatrice non singolare di A è h;*

2 *esiste una sottomatrice non singolare di ordine h di A che non è contenuta in alcuna sottomatrice non singolare di ordine $h+1$ di A;*

3 *il rango di A è h.*

Non diamo dimostrazione.

Sistemi con qualche soluzione, Teorema di Rouchè-Capelli

Così come il concetto di matrice non singolare permette di caratterizzare i sistemi lineari di n equazioni in n incognite che hanno una ed una sola soluzione, si ha che il concetto di rango di una matrice permette di caratterizzare i sistemi lineari di m equazioni in n incognite che hanno almeno una soluzione.

Teorema 3 (Rouchè-Capelli) *Un sistema lineare di m equazioni in n incognite $Ax = b$ ha almeno una soluzione se e solo se il rango della matrice dei coefficienti è uguale al rango della matrice completa del sistema:*

$$\rho(A) = \rho([A|b]).$$

Dimostrazioje parziale. Proviamo che se $\rho(A) = \rho([A|b])$ allora il sistema $Ax = b$ ha almeno una soluzione; poniamo $\rho(A) = \rho([A|b]) = h$.
Consideriamo la rappresentazione vettoriale del sistema

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b;$$

$a_1, \ldots, a_n$ sono le colonne di A, che sono vettori in $\mathbb{R}^m$ così come b è un vettore in $\mathbb{R}^m$. Essendo $\rho(A) = h$, esiste una sequenza linearmente indipendente

$$a_{j_1}, \ldots, a_{j_h}$$

di h colonne di A. La sequenza

$$a_{j_1}, \ldots, a_{j_h}, b$$

di $h+1$ colonne di $[A|b]$ è linearmente dipendente, essendo $\rho([A|b]) = h$. Dunque b si può ottenere come combinazione lineare di $a_{j_1}, \ldots, a_{j_h}$, esistono cioè dei numeri reali $\bar{x}_{j_1}, \ldots, \bar{x}_{j_h}$ tali che

$$a_{j_1}\bar{x}_{j_1} + \cdots + a_{j_h}\bar{x}_{j_h} = b.$$

Ponendo $\bar{x}_j = 0$ per ogni $j \in \{1, \ldots, n\}$ con $j \notin \{j_1, \ldots, j_h\}$ si ha

$$\sum_{j=1}^{n} a_j\bar{x}_j = b.$$

Dunque $\bar{x} = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ è una soluzione del sistema.

Applicazione. Consideriamo il sistema lineare nelle incognite x, y, z e parametro t

$$\begin{cases} tx + y + z = t \\ x + ty + z = t \\ x + y + tz = t \end{cases}$$

Il determinante della matrice dei coefficienti è

$$\begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 \\ 1 & 1 & t \end{vmatrix} = t^3 - 3t + 2 = (t-1)^2(t+2).$$

Dunque il sistema ha una ed una sola soluzione se e solo se $t \neq 1$ e $t \neq -2$.

Per $t = 1$ il sistema equivale all'unica equazione

$$\{\ x + y + z = 1$$

ed ha infinite soluzioni, dipendenti da due parametri liberi.

Per $t = -2$ il sistema diviene

$$\begin{cases} -2x + y + z = -2 \\ x - 2y + z = -2 \\ x + y - 2z = -2 \end{cases}$$

Per il teorema di Rouchè-Capelli, questo sistema ha soluzione se e solo se la matrice dei coefficienti e la matrice completa del sistema hanno lo stesso rango.

La matrice dei coefficienti

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

è singolare, e contiene la sottomatrice non singolare di ordine 2

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix},$$

dunque essa ha rango 2.

Consideriamo la matrice completa del sistema

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \end{array}\right];$$

questa matrice ha la sottomatrice non singolare di ordine 2

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix};$$

le sottomatrici di ordine 3 che contengono questa sottomatrice sono la matrice dei coefficienti, che è singolare, e la matrice

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

che ha determinante -18.

Dunque: la matrice dei coefficienti ha rango 2 e la matrice completa ha rango 3. Concludiamo che il sistema non ha alcuna soluzione.

(Si poteva giungere alla stessa conclusione effettuando la seguente osservazione: (1) sommando i primi membri delle tre equazioni del sistema si ottiene $0x + 0y + 0z$ e sommando i secondi membri delle tre equazioni del sistema si ottiene -6; (2) le tre equazioni del sistema implicano l'equazione

$$0x + 0y + 0tz = -6$$

che non ha soluzioni; (3) dunque il sistema non ha soluzioni.)