Lezioni 22-23, Algebra Lineare, 22 e 23 11.2017

Sistemi Lineari

Caso generale

Consideriamo un sistema lineare di m equazioni in n incognite $Ax = b$ (A matrice $m \times n$). Nel caso $m = n$, abbiamo visto che il sistema ha una ed una sola soluzione se e solo se la matrice dei coefficienti A è non singolare, e in tal caso la soluzione si può calcolare con la regola di Cramer. Nel caso generale, abbiamo poi visto che il sistema ha almeno una soluzione se e solo se la matrice dei coefficienti A e la matrice completa $[A|b]$ hanno lo stesso rango (teorema di Rouchè-Capelli). Supponiamo ora che questa condizione sia soddisfatta, e ci chiediamo come si possono calcolare le soluzioni

Sistemi lineari con rango della matrice dei coefficienti uguale al numero delle equazioni.

Consideriamo un sistema lineare $Ax = b$ di m equazioni in un certo numero di incognite. La matrice dei coefficienti A è contenuta nella matrice completa $[A|b]$ ed hanno entrambe m righe, dunque in particolare

$$\rho(A) \leq \rho(A|b) \leq m.$$

In questo paragrafo consideriamo il caso in cui $\rho(A) = m$. In questo caso,

$$\rho(A) = \rho(A|b) = m,$$

e per il Teorema di Rouchè-Capelli il sistema ha soluzioni. Ci chiediamo come possiamo risolvere un tale sistema, cioè come possiamo descrivere esplicitamente tutte le sue soluzioni.

Esempio 1 Consideriamo l'equazione nelle incognite x, y

$$2x + 3y = 5.$$

Possiamo risolvere l'equazione esplicitando una incognita in funzione dell'altra, e lasciando questa libera di assumere qualsiasi valore in $\mathbb{R}$. Ad esempio, possiamo esplicitare la x in funzione di y, e lasciare y libera:

$$x = -\frac{3}{2}\,y + \frac{5}{2}; \quad y \text{ libera.}$$

Le soluzioni dell'equazione sono dunque date dalla formula

$$(-\frac{3}{2}\,t + \frac{5}{2},\ t), \quad t \text{ variabile in } \mathbb{R}.$$

Questa formula si può riscrivere nella forma

$$t(-\frac{3}{2},\ 1) + (\frac{5}{2},\ 0), \quad t \text{ variabile in } \mathbb{R}.$$

Da questa formula si vede che le soluzioni dell'equazione sono i punti del piano $\mathbb{R}^2$ che appartengono alla retta che ha la direzione del vettore $(-\frac{3}{2},\ 1)$ e passa per il punto $(\frac{5}{2},\ 0)$.

Esempio 2 Consideriamo l'equazione nelle incognite x, y

$$2x = 5.$$

Le soluzioni dell'equazione sono date dalla formula

$$(-\frac{5}{2},\ t), \quad t \text{ variabile in } \mathbb{R}.$$

Le soluzioni dell'equazione sono i punti della retta parallela al secondo asse e passante per il punto $(\frac{5}{2},\ 0)$.

Si prova che

> ogni equazione lineare in due incognite, nella quale almeno uno dei coefficienti delle incognite sia non nullo, ha infinite soluzioni che dipendono da un parametro libero; l'insieme delle soluzioni è una retta nel piano.

Esempio 3 Consideriamo l'equazione nelle incognite x, y, z

$$4x + 6y + 2z = 1.$$

Possiamo risolvere l'equazione esplicitando una incognita in funzione delle altre due, e lasciando queste due libere di assumere qualsiasi valore in $\mathbb{R}$. Ad esempio, dall'equazione possiamo ricavare z in funzione di x, y e lasciare x, y libere:

$$z = -2x - 3y + \frac{1}{2}; \quad x, y \text{ libere.}$$

Le soluzioni dell'equazione sono date da

$$(s,\ t,\ -2s - 3t + \frac{1}{2}), \quad s, t \text{ variabili in } \mathbb{R},$$

o in altra forma forma

$$s(1, 0, -2)) + t(0, 1, -3) + (0, 0, \frac{1}{2}), \quad s, t \text{ variabile in } \mathbb{R};$$

da questa forma si vede che le soluzioni dell'equazione sono i punti dello spaio $\mathbb{R}^3$ che appartengono al piano parallelo ai vettori $(1, 0, -2)$ e $(1, 0, -3)$ e passante per il punto $(0, 0, \frac{1}{2})$.

Si prova che

ogni equazione lineare in tre incognite, nella quale almeno uno dei coefficienti delle incognite sia non nullo, ha infinite soluzioni che dipendono da due parametri liberi; l'insieme delle soluzioni è un piano nello spazio.

Esempio 4 Consideriamo il sistema di due equazioni nelle incognite x, y, z

$$\begin{cases} 2x + 3y + 5z = 4 \\ 6x + 7y + 9z = 8 \end{cases}$$

Possiamo cercare di risolvere il sistema esplicitando due incognite in funzione dell'altra, e lasciando questa libera di assumere qualsiasi valore in $\mathbb{R}$. Ad esempio, possiamo cercare di esplicitare x, y in funzione di z. A tale scopo riscriviamo il sistema nella forma

$$\begin{cases} 2x + 3y = 4 - 5z \\ 6x + 7y = 8 - 9z \end{cases};$$

il determinante delle matrice dei coefficienti di x, y è

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = -4 \neq 0;$$

dunque possiamo effettivamente esplicitare x, y in funzione di z; usando la regola di Cramer otteniamo

$$\begin{aligned} x &= \frac{\begin{vmatrix} 4-5z & 3 \\ 8-9z & 7 \end{vmatrix}}{-4} = -1 + 2z \\ y &= \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4-5z \\ 6 & 8-9z \end{vmatrix}}{-4} = 2 - 3z \\ z & \text{ libera.} \end{aligned}$$

Le soluzioni del sistema sono date da

$$(-1 + 2t, 2 - 3t, t), \quad t \text{ variabile in } \mathbb{R}.$$

o in altra forma forma

$$t(2, -3, 1) + (-1, 2, 0), \quad t \text{ variabile in } \mathbb{R};$$

da questa forma si vede che le soluzioni dell'equazione sono i punti dello spaio $\mathbb{R}^3$ che appartengono alla retta parallela al vettore $(2, -3, 1)$ e passante per il punto $(-1, 2, 0)$.

Esempio 5 Consideriamo il sistema di due equazioni nelle incognite x, y, z

$$\begin{cases} 4x + 6y + 2z = 1 \\ 6x + 9y + 5z = 1 \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti è

$$\begin{bmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 6 & 9 & 5 \end{bmatrix};$$

che ha rango 2; i determinanti delle sottomatrici di ordine 2 sono

$$\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = 8, \quad \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 9 & 5 \end{vmatrix} = 12.$$

Non potremo esplicitare x, y in funzione di z, ma potremo esplicitare x, z in funzione di y, oppure potremo esplicitare y, z in funzione di x. Si lascia al lettore il compito di completare la risoluzione del sistema in entrambi i modi.

Si prova che

> ogni sistema lineare di due equazioni in tre incognite, che ha matrice dei coefficienti di rango due, ha infinite soluzioni che dipendono da un parametro libero; l'insieme delle soluzioni è una retta nello spazio.

In generale, si ha

Proposizione 1 *Sia dato un sistema lineare di m equazioni in n incognite, con $m < n$*

$$Ax = b \;\; (A\; m \times n), \qquad \textit{in altra forma} \qquad \sum_{j=1}^{n} a_j x_j = b \;\; (a_j, b \in \mathbb{R}^m).$$

Se $\rho(A) = m$ allora,

1. *il sistema ha infinite soluzioni, che dipendono da $n - m$ parametri liberi;*
2. *le soluzioni si possono ottenere esplicitando m incognite in funzione delle rimanenti $n - m$ incognite;*
3. *le incognite $x_{j_1}, \ldots, x_{j_m}$ si possono esplicitare se e solo se le corrsipondenti colonne $a_{j_1}, \ldots, a_{j_m}$ formano una matrice non singolare, cioè*

$$\left| a_{j_1} \,:\, \ldots \,:\, a_{j_m} \right| \neq 0.$$

Idea della dimostrazione. Consideriamo il sistema lineare

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j = b$$

e supponiamo per semplicità che le incognite $x_1, \ldots, x_m$ abbiano corrsipondenti colonne $a_1, \ldots, a_m$ che formano una matrice non singolare. Per ogni valore delle incognite $x_{m+1}, \ldots, x_n$, il sistema

$$\sum_{j=1}^{m} a_j x_j = b - \sum_{j=m+1}^{n} a_j x_j$$

di m equazioni nelle m incognite $x_1, \ldots, x_m$ ha matrice dei coefficienti non singolare, e dunque ha una ed una sola soluzione, che dipende valore delle incognite $x_{m+1}, \ldots, x_n$; questa soluzione si può ottenere applicando la regola di Cramer.

Sistemi lineari con rango della matrice completa minore del numero delle equazioni

Consideriamo un sistema lineare $Ax = b$ di m equazioni in un certo numero incognite e la sua matrice completa $[A|b]$, di m righe e un certo numero di colonne. Ci chiediamo cosa significhi il rango di $[A|b]$, come massimo numero di righe linearmente indipendenti, per le equazioni del sistema $Ax = b$. In particolare, ci chiediamo cosa sighifichi la eventualità $\rho(A|b) < m$ per le equazioni di $Ax = b$.

Esempio Consideriamo un sistema lineare di 2 equazioni in 2 incognite $Ax = b$ del tipo

$$\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ ax + by = c \end{cases}$$

Supponiamo che

$$\rho \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 4 \\ a & b & c \end{array} \right] = 1;$$

allora: (1) esiste un $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che la seconda riga della matrice si possa scrivere

$$(a, b, c) = \alpha(2, 3, 4);$$

(2) la seconda equazione del sistema si può scrivere

$$2\alpha x + 3\alpha y = 4\alpha;$$

(3) il sistema dato ha le stesse soluzioni dell'unica equazione

$$2x + 3y = 4.$$

Un'analisi più approfondita porta prima a congetturare e poi a provare la seguente

Proposizione 2 *Sia dato un sistema lineare di m equaioni in n incognite,*

$$Ax = b \ \ (A \text{ matrice } m \times n) \qquad \text{in altra forma} \qquad \begin{cases} a'_1 x = b_1 \\ \vdots \\ a'_m x = b_m \end{cases} \qquad (a'_i \text{ vettori riga } \in \mathbb{R}^n)$$

Se $\rho(A|b) = h$, allora:

1. *il sistema dato ha le stesse soluzioni di un suo sottosistema di h equazioni;*
2. *se la sequenza delle righe i_1-ma, ..., i_h-ma di $[A|b]$ è linearmente indipendente, allora il sistema dato ha le stesse soluzioni del suo sottosistema*

$$\begin{cases} a'_{i_1} x = b_{i_1} \\ \vdots \\ a'_{i_h} x = b_{i_h} \end{cases}$$

Tenendo conto che la matrice completa di un sistema di equazioni in n incognite avendo $n+1$ colonne ha rango al più $n+1$, da questa proposizione segue in particolare che

Proposizione 3 *Ogni sistema lineare di un certo numero di equazioni in n incognite ha le stesse soluzioni di un suo opportuno sottosistema di al più $n+1$ equazioni.*

Esempio. Consideriamo il sistema lineare di tre equazioni nelle due incognite x, y

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 3x + 7y = 1 \\ 5x + 5y = 3 \end{cases}$$

La matrice completa del sistema

$$[A|b] = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \\ 5 & 5 & 3 \end{array} \right]$$

è singolare (lo si verifichi), ha rango 2, e ogni due sue righe sono linearmente indipendenti.
Dunque il sistema lineare ha le stesse soluzioni di ogni suo sottosistema di due equazioni, ad esempio quello costituito dalle prime due equazioni

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 3x + 7y = 1 \end{cases}$$

il quale a sua volta ha una ed una soluzione, che si può calcolare ad esempio con la regola di Cramer.

Caso generale

Proposizione 4 *Sia dato un sistema lineare $Ax = b$ (A $m \times n$), e sia $\rho(A) = \rho(A|b) = h$. Allora,*

1. *il sistema ha soluzioni, che dipendono da $n-h$ parametri liberi;*

2. *le soluzioni si possono ottenere esplicitando h incognite in funzione delle rimanenti $n-h$ incognite, in h equazioni;*

3. *le incognite $x_{j_1}, \ldots, x_{j_h}$ si possono esplicitare nelle equazioni i_1−ma ... i_h−ma se e solo se i rispettivi coefficienti formano una matrice $h \times h$ non singolare*

$$\begin{vmatrix} a_{i_1,j_1} & \dots & a_{i_1,j_h} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_h,j_1} & \dots & a_{i_h,j_h} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Esercizio. Risolvere, se possibile, il seguente sistema lineare di tre equazioni nelle tre incognite x, y, z

$$\begin{cases} 2x + 3y + 5z = 1 \\ 5x + 3y + 2z = 1 \\ -x + 3y + 8Z = 1 \end{cases} .$$

La matrice completa del sistema è

$$[A|b] = \left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & 5 & 1 \\ 5 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 8 & 1 \end{array} \right].$$

Osservando la matrice si nota che

$$2 \leq \rho(A) \leq \rho(A|b) \leq 3.$$

La matrice dei coefficienti ha determinante

$$\left| \begin{array}{rrr} 2 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & 2 \\ -1 & 3 & 8 \end{array} \right] = \ldots = 0$$

Dunque $\rho(A) = 2$. Osserviamo che la sottomatrice di ordine 2 di A costituita dagli elementi comuni alle prime due righe ed alle prime due colonne

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

è non singolare. Questa matrice è contenuta in due sottomatrici di ordine 3 di $[A|b]$: una è la matrice A e l'altra è la matrice

$$\left[\begin{array}{rrr} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{array} \right];$$

entrambe queste matrici sono singolari, dunque $\rho(A|b) = 2$.
Abbiamo così che

$$\rho(A) = \rho(A|b) = 2.$$

Il sistema ha soluzioni, che dipendono da 3-2= 1 parametro libero. Queste soluzioni si possono ottenere esplicitando due opportune incognite in funzione della terza da due opportune equazioni. Ad esempio, poichè la matrice dei coefficienti di x, y nelle prime due equazioni è non singolare, si possonio esplicitare x, y dalle prime due equazioni del sistema. Si lascia al lettore il compito di completare l'esercizio.

Sistemi lineari omogenei

Abbiamo visto in precedenza che l'insieme delle soluzioni di una equazione lineare omogenea in n incognite è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$, e che questo sottospazio ha dimensione $n-1$.

Proposizione 5 *Sia $Ax = 0$ un sistema lineare omogeneo di m equazioni in n incognite. Allora il suo insieme delle soluzioni è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$.*

Dimostrazione. Dobbiamo provare che per ogni $u, v \in \mathbb{R}^n$ soluzioni del sistema $Ax = 0$ ed ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ anche $u + v$ ed αu sono soluzioni del sistema $Ax = 0$. Infatti, da $Au = 0$ ed $Av = 0$ segue $A(u+v) = Au + Av = 0 + 0 = 0$ e $A(\alpha u) = \alpha(Au) = \alpha 0 = 0$.

Teorema 1 *Il sottospazio di $\mathbb{R}^n$ costituito dalle soluzioni di un sistema lineare omogeneo $Ax = 0$ in n incognite ha dimensione $n - \rho(A)$.*

No diamo la dimostrazione.