Autovettori e autovalori

Funzione lineare associata ad una matrice quadrata

Una matrice A quadrata di ordine n può essere rappresentata come una funzione

$$f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad f_A(x) = Ax,$$

che si dice "funzione lineare" associata ad A. Esplicitamente, posto

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

si ha

$$f_A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n \end{bmatrix}.$$

La funzione f_A in entrata prende n numeri reali $x_1, \dots, x_n$ e in uscita restituisce n numeri reali ciascuno dei quali è un polinomio omogeneo di I grado (eventalmente nullo) in $x_1, \dots, x_n$

Esempio. La matrice

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

è rappresentata dalla funzione

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_1 + 2x_2 \end{bmatrix}.$$

Le funzioni più semplici sono quelle associate a matrici diagonali, cioè matrici del tipo

$$\begin{bmatrix} d_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & d_n \end{bmatrix}$$

in quanto si ha

$$\begin{bmatrix} d_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & d_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1x_1 \\ \vdots \\ d_nx_n \end{bmatrix}$$

e dunque ogni numero reale in uscita dipende solo dal corrispondente numero reale in entrata.

Esempio. La matrice
$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$
è rappresentata dalla funzione
$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad g \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 3x_2 \end{bmatrix}.$$
Autovettori ed autovalori si possono riguardare come un mezzo per tentare di ricondurre lo studio della funzione lineare associata ad una matrice allo studio della funzione lineare associata ad una opportuna matrice diagonale.

Autovettori ed Autovalori

Definizione 1 *Sia A una matrice quadrata di ordine n. Un vettore non nullo $v \neq 0_n$ di $\mathbb{R}^n$ si dice "autovettore" di A se Av è un multiplo scalare di v, cioè se esiste un $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che*
$$Av = \lambda v;$$
lo scalare λ si dice "autovalore" di A associato a v.

Esempio. Consideriamo la matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$. Si ha
$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$
Dunque: il primo vettore canonico di $\mathbb{R}^2$ è un autovettore della matrice A con autovalore associato 2, e il secondo vettore canonico di $\mathbb{R}^2$ è un autovettore della matrice A con autovalore associato 3. In generale, si vede che per una matrice D diagonale di ordine n, ciascun vettore e_i della base canonica di $\mathbb{R}^n$ è un autovettore, con autovalore associato l'$i-$mo elemento sulla diagonale di D.

Per una matrice non diagonale non ci sono autovettori così ovvi, ma possono comunque essercene, un poco nascosti. Vediamo prima come si possono cercare gli autovalori.

Ricerca degli autovalori. Polinomio caratteristico

Sia A una matrice quadrata di ordine n e sia $\lambda \in \mathbb{R}$ uno scalare. Le seguenti affermazioni sono equivalenti

(1) λ è un autovalore di A, cioè esiste un vettore non nullo $v \neq 0_n$ in $\mathbb{R}^n$ tale che $Av = \lambda v$;

(2) esiste un vettore non nullo $v \neq 0_n$ in $\mathbb{R}^n$ tale che $(A - \lambda I_n)v = 0_n$, cioè il sistema lineare omogeneo $(A - \lambda I_n)x = 0_n$ non ha una sola soluzione;
(3) la matrice $A - \lambda I_n$ è singolare, cioè ha determinante $|A - \lambda I_n| = 0$.
La matrice

$$\begin{aligned} A - \lambda I_n &= \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix} \end{aligned}$$

si dice "matrice caratteristica" di A, il suo determinante

$$|A - \lambda I_n| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

è un polimomio, che si dice "polinomio caratteristico" di A.

Abbiamo così provato che

> uno scalare λ è un autovalore di una matrice A se e solo se è una radice del polinomio caratteristico di A :
>
> $$|\ A - \lambda I_n\ | = 0.$$

Esempio. Consideriamo la matrice $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$. La matrice caratteristica è

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - \lambda & 0 \\ 0 & 3 - \lambda \end{bmatrix}$$

Il polinomio caratteristico è

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & 0 \\ 0 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)(3 - \lambda).$$

Gli autovalori sono le radici del polinomio caratteristico, dunque sono $\lambda = 3$ e $\lambda = 2$. Sapevamo già che questi sono autovalori della matrice, ora sappiamo che non ce ne sono altri.

Esempio. Consideriamo la matrice $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. La matrice caratteristica è

$$\begin{bmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 1 & 2 - \lambda \end{bmatrix}$$

Il polinomio caratteristico è

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1 = (3-\lambda)(1-\lambda).$$

Gli autovalori sono le radici del polinomio caratteristico, dunque sono $\lambda = 3$ e $\lambda = 1$.

Esempio. Consideriamo la matrice $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Il polinomio caratteristico è

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1.$$

Questo polinomio non ha radici nel campo $\mathbb{R}$ dei numeri reali (ne ha due nel campo dei numeri complessi $\mathbb{C}$), dunque la matrice non ha autovalori in $\mathbb{R}$, e dunque nemmeno autovettori in $\mathbb{R}^2$.

Il polinomio caratteristico di una matrice $\left[\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}\right|$ quadrata del secondo ordine è

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)(d-\lambda) - cb = \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - cb;$$

è un polinomio di secondo grado; il coefficiente di λ^2 è 1, il coefficiente di λ è l'opposto della somma dei termini diagonali della matrice e il termine noto è il determinante della matrice. In generale, si prova che

> il polinomio caratteristico di una matrice quadrata di ordine n è un polinomio di grado n, il coefficiente di λ^n è ± 1 (1 o -1 secondo che n sia pari o dispari) e il termine noto è il determinante della matrice.

In particolare, da ciò segue che una matrice quadrata di ordine n ha al più n autovalori distinti.

Ricerca degli autettori. Autospazi

Sia A una matrice quadrata di ordine n e sia $\lambda \in \mathbb{R}$ un autovalore di A. Gli autovettori associati a λ sono le soluzioni non banali dell'equazione nell'incognita $x \in \mathbb{R}^n$

$$Ax = \lambda x, \quad \text{cioè} \quad (A - \lambda I_n)x = 0_n.$$

Questi autovettori, assieme al vettore nullo, formano un sottospazio di $\mathbb{R}^n$, che si dice "autospazio" di A associato a λ e si indica con V_λ.

Esempio. Consideriamo la matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$. Gli autovalori di A sono 2 e 3.

L'autospazio V_2 associato all'autovalore 2 è l'insieme dei vettori $x \in \mathbb{R}^2$ tali che $Ax = 2x$ cioè $(A - 2I_2)x = 0_2$, esplicitamente

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{cioè} \quad x_2 = 0$$

le soluzioni sono date da x_1 libera e $x_2 = 0$ in altri termini

$$(t, 0) = t(1, 0), \quad t \in \mathbb{R}.$$

L'autospazio V_3 associato all'autovalore 3 è l'insieme dei vettori $x \in \mathbb{R}^2$ tali che $Ax = 3x$ cioè $(A - 3I_2)x = 0_2$, esplicitamente

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{cioè} \quad -x_1 = 0$$

le soluzioni sono date da $x_1 = 0$ e x_2 libera, in altri termini

$$(0, t) = t(0, 1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Esempio. Consideriamo la matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Gli autovalori di A sono 3 e 1.
L'autospazio V_3 associato all'autovalore 3 è l'insieme dei vettori $x \in \mathbb{R}^2$ tali che $Ax = 3x$ cioè $(A - 3I_2)x = 0_2$, esplicitamente

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{cioè} \quad x_1 - x_2 = 0$$

le soluzioni sono date da $x_1 = x_2$ e x_2 libera, in altri termini

$$(t, t) = t(1, 1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

L'autospazio V_1 associato all'autovalore 1 è l'insieme dei vettori $x \in \mathbb{R}^2$ tali che $Ax = x$ cioè $(A - I_2)x = 0_2$, esplicitamente

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{cioè} \quad x_1 + x_2 = 0;$$

le soluzioni sono date da $x_1 = -x_2$ e x_2 libera, in altri termini

$$(-t, t) = t(-1, 1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Basi di autovettori

Sia A una matrice quadrata di ordine n e sia $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f_A(x) = Ax$ la associata funzione lineare. Supponiamo che esista una base $v_1, \ldots, v_n$ di $\mathbb{R}^n$ costituita da autovettori di A, con autovalori corrispondenti $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Ogni $x \in \mathbb{R}^n$ si può scrivere in uno ed un solo modo come

$$x = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n \qquad (\alpha_i \in \mathbb{R})$$

e il corrispondente vettore $f_A(x) = Ax$ come

$$\begin{aligned} Ax &= A(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) = \alpha_1(Av_1) + \cdots + \alpha_n(Av_n) \\ &= (\alpha_1\lambda_1)v_1 + \cdots + (\alpha_n\lambda_n)v_n. \end{aligned}$$

In alti termini: rispetto alla base degli autovettori, si ha che ciascuna delle coordinate del vettore Ax dipende solo dalla corrispondente coordinata del vettore x; specificamente: la $i-$ma coordinata di Ax è il prodotto dalla $i-$ma coordinata di x per l'$i-$mo autovalore ($i = 1, 2, \ldots, n$).

Esempio Consideriamo la matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.
Gli autovalori di A sono 3 e 1; scegliendo il vettore $u = (1, 1)$ nell'autospazio V_3 e il vettore $v = (1, -1)$ nell'autospazio V_1 otteniamo una base di $\mathbb{R}^2$. Scrivendo il generico vettore $x \in \mathbb{R}^2$ come

$$x = \alpha u + \beta v \qquad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$$

si ha

$$Ax = A(\alpha u + \beta v) = (3\alpha)u + \beta v.$$

Una proprietà di indipendenza lineare per gli autovettori ed una condizione che assicura l'esistenza di una base di autovettori sono date dal

Teorema 1 *Sia A una matrice quadrata di ordine n. Allora:*
(1) se $v_1, \ldots, v_m$ sono autovettori di A associati ad autovalori $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ a due a due distinti, allora $v_1, \ldots, v_m$ sono linearmente indipendenti;
(2) se A possiede n autovalori distinti, allora esiste una base di $\mathbb{R}^n$ formata da autovettori di A.

Le matrici del tipo seguente possiedono notevoli proprietà rispetto ad autovettori ed autovalori:

$$[a], \quad \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix} \quad \ldots$$

in generale matrici A quadrate di ordine n tali che $A_{ij} = A_{ji}$ per ogni $i, j = 1, \ldots, n$. Matrici di questo tipo si dicono "simmetriche".

Teorema 2 *(Spettrale) Sia A una matrice quadrata di ordine n reale simmetrica. Allora:*
(1) tutti gli autovalori di A sono reali;
(2) se u, v sono autovettori di A associati ad autovalori λ, μ distinti, allora u, v sono ortogonali;
(3) esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ formata da autovettori di A.

Trasposizione

Siano m ed n due interi positivi fissati. Data una matrice A di tipo $m \times n$, riscrivendo per colonne cio' che in A compare per righe (o, che è lo stesso, riscrivendo per righe ciò che in A compare per colonne), si ottiene una matrice di tipo $n \times m$, detta "matrice trasposta" di A ed indicata con A^T. In simboli, si ha:

$$\left(A^T\right)_{ij} = A_{ji}, \qquad i = 1, \ldots, n, \; j = 1, \ldots, m.$$

Osserviamo che

> una matrice quadrata risulta essere simmetrica se e solo se coincide con la propria trasposta; in simboli A è simmetrica se e solo se $A^T = A$.

L'operazione di trasposizione possiede le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned}
\left(A^T\right)^T &= A, \qquad \text{per ogni } A; \\
(A+B)^T &= A^T + B^T, \qquad \text{per ogni } A, B \text{ sommabili;} \\
(AB)^T &= B^T A^T, \qquad \text{per ogni } A, B \text{ moltiplicabili;} \\
(rA)^T &= rA^T, \qquad \text{per ogni } r \in \mathbb{R} \text{ ed ogni } A.
\end{aligned}$$

Dimostriamo la proprietà relativa alla moltiplicazione di matrici. Sia dunque A una matrice di tipo $m \times n$ e sia B una matrice di tipo $n \times p$. Proviamo innanzitutto che l'uguaglianza

$$(AB)^T = B^T A^T$$

è consistente, cioè che le matrici ai due lati dell'uguaglianza hanno lo stesso tipo. Infatti: da un lato la matrice AB è definita ed ha tipo $m \times p$, e la matrice $(AB)^T$ ha tipo $p \times m$; dall'altro lato, la matrice B^T ha tipo $p \times n$, la matrice A^T ha tipo $n \times m$, e la matrice $B^T A^T$ è definita ed ha tipo $p \times m$. Proviamo ora che

$$\left((AB)^T\right)_{ij} = \left(B^T A^T\right)_{ij}, \qquad i = 1, \ldots, p, \; j = 1, \ldots, m.$$

Infatti: al primo membro si ha

$$\begin{aligned}
\left((AB)^T\right)_{ij} &= (AB)_{ji} \\
&= \sum_{h=1}^{n} A_{jh} B_{hi},
\end{aligned}$$

al secondo membro si ha

$$\left(B^T A^T\right)_{ij} = \sum_{h=1}^{n} \left(B^T\right)_{ih} \left(A^T\right)_{hj} = \sum_{h=1}^{n} B_{hi} A_{jh},$$

e i due risultati sono uguali per la proprietà commutativa della moltiplicazione di numeri reali.

Forma quadratica associata ad una matrice simmetrica

Una matrice A simmetrica di ordine n può essere rappresentata come una funzione

$$q_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad q_A(x) = x^T A\, x,$$

che si dice "forma quadratica" associata ad A. Esplicitamente, posto

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad (a_{ij} = a_{ji})$$

si ha

$$\begin{aligned} q_A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\ &= \sum_{1 \le i,j \le n} x_i a_{ij} x_j \\ &= \sum_{1 \le i \le n} a_{ii} x_i^2 + \sum_{1 \le i < j \le n} a_{ij} x_i x_j + \sum_{1 \le j < i \le n} a_{ij} x_i x_j \\ &= \sum_{1 \le i \le n} a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} a_{ij} x_i x_j. \end{aligned}$$

La funzione q_A in entrata prende n numeri reali $x_1, \dots, x_n$ e in uscita restituisce un numero reale che è un polinomio omogeneo di II grado (eventalmente nullo) in $x_1, \dots, x_n$

Esempio. La matrice simmetrica

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad (a_{12} = a_{21})$$

è rappresentata dalla forma quadratica

$$q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad q \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = a_{11} x_1^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2.$$

Le forme quadratiche più semplici sono quelle associate a matrici diagonali

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & d_n \end{bmatrix}$$

in quanto si ha

$$x^T D\, x = \sum_{i=1}^{n} d_i x_i^2.$$