Integrali

Aree

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione definita su un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$. Sotto la condizione $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in [a, b]$, si ha che il grafico di f, l'asse x e le rette $x = a$ e $x = b$ delimitano una parte di piano, che si dice "trapezoide di f su $[a, b]$"; precisamente, si ha

$$\text{Trapezoide di } f \text{ su } [a, b] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ a \leq x \leq b, \ 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

Integrale

Di seguito una definizione di integrale in un caso particolare, nel quale gli aspetti tecnici sono semplici ma è già presente l'idea generale.

Sia $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, continua. Per il Teorema di Weierstrass, f possiede minimo globale (e massimo globale) su $[0, 1]$, e lo psssiede anche su ogni sootointervallo chiuso di $[0, 1]$. Le "somme inferiori di f" sono i numeri $s_1, s_2, s_4, \ldots$ definiti da

$$\begin{aligned}
s_1 &= 1 \cdot \mathrm{Min}_{[0,1]} f \\
s_2 &= \frac{1}{2}\mathrm{Min}_{[0,\frac{1}{2}]} f \ + \ \frac{1}{2}\mathrm{Min}_{[\frac{1}{2},1]} f \\
s_4 &= \frac{1}{4}\mathrm{Min}_{[0,\frac{1}{4}]} f + \frac{1}{4}\mathrm{Min}_{[\frac{1}{4},\frac{1}{2}]} f + \frac{1}{4}\mathrm{Min}_{[\frac{1}{2},\frac{3}{4}]} f + \frac{1}{4}\mathrm{Min}_{[\frac{3}{4},1]} f \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Si verifica che

$$s_1 \leq s_2 \leq s_4 \leq \cdots$$

inoltre l'insieme delle somme inferiori di f è superiormente limitato, dunque possiede estremo superiore in $\mathbb{R}$.

Le "somme superiori di f" sono i numeri $S_1, S_2, S_4, \ldots$ definiti da

$$\begin{aligned}
S_1 &= 1 \cdot \mathrm{Max}_{[0,1]} f \\
S_2 &= \frac{1}{2}\mathrm{Max}_{[0,\frac{1}{2}]} f \ + \ \frac{1}{2}\mathrm{Max}_{[\frac{1}{2},1]} f \\
s_4 &= \frac{1}{4}\mathrm{Max}_{[0,\frac{1}{4}]} f + \frac{1}{4}\mathrm{Max}_{[\frac{1}{4},\frac{1}{2}]} f + \frac{1}{4}\mathrm{Max}_{[\frac{1}{2},\frac{3}{4}]} f + \frac{1}{4}\mathrm{Max}_{[\frac{3}{4},1]} f \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Si verifica che

$$S_1 \geq S_2 \geq S_4 \leq \cdots$$

inoltre l'insieme delle somme supertiori di f è inferiormente limitato, dunque possiede estremo inferiore in $\mathbb{R}$. Si dimostra che l'estremo superiore delle somme inferiori di f è uguale all'estremo inferiore delle somme superiori di f; il valore comune di questi due estremi si dice "integrale" (di Riemann) di f su $[0,1]$ e si indica con $\int_0^1 f(x)\ \mathrm{dx}$. Si pone dunque

$$\mathrm{Sup}_n\, s_{2^n} = \int_0^1 f(x)\ \mathrm{dx} = \mathrm{Inf}_n\, S_{2^n}$$

Le definizioni di somme inferiori e superiori, il teorema sull'uguaglianza fra l'estremo superiore delle somme inferiori e l'estremo inderiore delle somme superiori, e la definizione di integrale (di Riemann) si estendono al caso di una funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{dx}.$$

Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e' una funzione continua non negativa, allora si pone

$$\text{Area del trapezoide di } f \text{ su } [a,b] = \int_a^b f(x)\ \mathrm{dx}$$

Si prova che

> questa definizione di area è coerente con quella della geometria elementare

Dunque, in particolare di ha

$$\int_a^b k\ \mathrm{dx} = k(b-a) \qquad (k \text{ costante})$$
$$\int_a^b x\ \mathrm{dx} = (b-a)(b+a)/2 = b^2/2 - a^2/2.$$

Proprieta'

Proposizione 1 *L'integrale di Riemann posside le seguenti proprieta'*

$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx,$$
$$\int_a^b (\alpha f(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx;$$

per ogni $c \in [a,b]$,

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx;$$

se $f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in [a,b]$, allora

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

($f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funzioni continue, $\alpha \in \mathbb{R}$).

Non diamo la dimostrazione di questa proposizione. Segnaliamo solo che si basa in prima battuta sulle analoghe proprieta' delle sommatorie:

$$\sum_{i=1}^{n}(f_i + g_i) = \sum_{i=1}^{n} f_i + \sum_{i=1}^{n} g_i,$$

$$\sum_{i=1}^{n}(\alpha f_i) = \alpha \sum_{i=1}^{n} f_i;$$

$$\sum_{i=1}^{m} f_i + \sum_{i=m+1}^{n} f_i = \sum_{i=1}^{n} f_i;$$

$$\sum_{i=1}^{n} f_i \leq \sum_{i=1}^{n} g_i, \qquad (\text{se } f_i \leq g_i \ \forall i).$$

Convenzione Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua su un intervallo I; abbiamo indicato l'integrale di f su un intervallo $[a,b] \subseteq I$ col simbolo $\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}$; poniamo ora

$$\int_b^a f(x)\,\mathrm{dx} = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}.$$

Con questa convenzione, si ha

$$\int_p^q f(x)\,\mathrm{dx} + \int_q^r f(x)\,\mathrm{dx} = \int_p^r f(x)\,\mathrm{dx}$$

per ogni $p,q,r \in I$, indipendentemente dalla loro posizione relativa.

funzione integrale

Consideriamo la funzione valore assoluto

$$x \mapsto |x| \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Questa funzione e' continua su $\mathbb{R}$, dunque per ogni $x \in \mathbb{R}$ e' definito l'integrale $\int_0^x |t|\mathrm{dt}$, e si ha una funzione

$$x \mapsto \int_0^x |t|\mathrm{dt}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Per il significato dell'integrale come area con segno si ha

$$\int_0^x |t|\mathrm{dt} = \begin{cases} \frac{x^2}{2} & \text{per } x \geq 0 \\ -\frac{x^2}{2} & \text{per } x \leq 0 \end{cases}$$

Si osservi che la funzione $x \mapsto |x|$ e' continua su $\mathbb{R}$ (ma non derivabile in 0), e la funzione $x \mapsto \int_0^x |t| \mathrm{dt}$ e' derivabile su $\mathbb{R}$ (ma non due volte derivabile in 0). Inoltre si ha

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} \int_0^x |t| \mathrm{dt} = |x|, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Definizione 1 *Siano $f : I \to \mathbb{R}$ funzione continua su I intervallo, e $c \in I$ fissato. La funzione che a ciascun $x \in I$ associa l'integrale di f sull'intervallo $[c, x]$ viene detta "funzione integrale di f con punto base c", e viene indicata con $\mathcal{I}_{f;c}$; in simboli,*

$$\mathcal{I}_{f;c} : I \to \mathbb{R}, \qquad \mathcal{I}_{f;c}(x) = \int_c^x f(t)\, dt.$$

Teorema fondamentale

Teorema 1 (Teorema fondamentale) *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua su un intervallo I, e $c \in I$. Allora la funzione integrale $\mathcal{I}_{f;c} : I \to \mathbb{R}$ e' derivabile su I, inoltre*

$$(\mathcal{I}_{f;c})'(x) = f(x), \qquad \forall x \in I.$$

Se le funzioni sono date mediante espressioni in variabili, e l'integrale e la derivata vengono visti come operatori su tali espressioni, allora l'enunciato del teorema si puo' scrivere nella forma

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} \left(\int_c^x f(t) \mathrm{dt} \right) = f(x).$$

Diamo piu' avanti la dimostrazione. Questo teorema suggerisce di dare la seguente

Definizione 2 *Sia data una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ con I intervallo. Si dice che una funzione $F : I \to \mathbb{R}$ derivabile su I e' una primitiva di f se e solo se*

$$F'(x) = f(x), \qquad \forall x \in I.$$

Si osservi che se una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ possiede una primitiva $F : I \to \mathbb{R}$ allora tutte le funzioni $G : I \to \mathbb{R}$ del tipo $G = F + k$ con $k \in \mathbb{R}$ costante sono primitive di f. Infatti,

$$G' = (F + k)' = F' + k' = F' = f.$$

Vale anche il viceversa, come stabilito dal seguente

Teorema 2 *Sia data una funzione $f : I \to \mathbb{R}$, con I intervallo. Se $F : I \to \mathbb{R}$ e' una primitiva di f, allora le primitive di f sono tutte e sole le funzioni $G : I \to \mathbb{R}$ del tipo $G = F + k$, con $k \in \mathbb{R}$ costante.*

Teorema 3 (Formula di Torricelli). *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua, e sia $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ una sua primitiva. Allora*

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Spesso si pone $F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$ e si scive l'enunciato del teorema nella forma

$$\int_a^b f(x)\mathrm{dx} = [F(x)]_a^b.$$

Questo teorema deriva direttamente dai precedenti due. Infatti: per il I teorema fondamentale ciascuna funzione integrale di f e' una primitiva di f; per il precedente teorema ogni primitiva di f e' del tipo $F + k$ con $k \in \mathbb{R}$ costante; dunque in particolare si ha

$$\int_a^x f(t)\mathrm{dt} = F(x) + k, \qquad \forall x \in [a, b].$$

Posto $x = a$ si ha $0 = \int_a^a f(t)\mathrm{dt} = F(a) + k$ da cui $k = -F(a)$; posto $x = b$ si ha

$$\int_a^b f(t)\mathrm{dt} = F(b) + k = F(b) - F(a).$$

Applicazioni

La formula di Torricelli riconduce il problema del calcolo degli integrali al problema spesso piu' semplice della ricerca di una primitiva della funzione integranda. Nella lezione scorsa abbiamo calcolato l'integrale della funzione $x \mapsto x$ sull'intervallo $[0, 1]$ usando la definizione. Di seguito mostriamo il calcolo degli integrali delle funzioni potenza ed altre usando il II teorema fondamentale.

(1) Ci proponiamo di calcolare

$$\int_0^1 x^2 \mathrm{dx}$$

Una primitiva della funzione x^2 ($x \in \mathbb{R}$) e' $\frac{x^3}{3}$ ($x \in \mathbb{R}$), dunque

$$\int_0^1 x^2 \mathrm{dx} = [\frac{x^3}{3}]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

(2) Per ciscun intero non negativo n,

$$\int_0^1 x^n \mathrm{dx} = [\frac{x^{n+1}}{n+1}]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

(3) L'integrale

$$\int_0^1 \frac{1}{x} \mathrm{dx}$$

non ha senso (rispetto alla definizione data). Infatti, la funzione $x \mapsto \frac{1}{x}$ non e' definita in $x = 0$, ed essendo $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ non puo' nemmeno essere definita in $x = 0$ in modo da essere continua in $x = 0$.

(3′) Si ha

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\mathrm{dx} = [\log x]_1^2 = \log 2 - \log 1 = \log 2;$$
$$\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x}\mathrm{dx} = [\log(-x)]_{-2}^{-1} = \log 1 - \log 2 = -\log 2$$

Si noti che la funzione $x \mapsto \log x$ e′ una primitiva di $x \mapsto \frac{1}{x}$ su $[1,2]$, ma la funzione $x \mapsto \log x$ non e′ una primitiva di $x \mapsto \frac{1}{x}$ su $[-2,-1]$, in quanto non e′ definita per $x < 0$; invece la funzione $x \mapsto \log(-x)$ e′ una primitiva di $x \mapsto \frac{1}{x}$ su $[-2,-1]$, in quanto e′ definita su questo intervallo e $\mathrm{D}\log(-x) = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$.

Integrali generalizzati.

Abbiamo definito l'integrale di Riemann per una funzione continua su un intervallo chiuso e limitato, e nel caso di una funzione non negativa, abbiamo definito tale integrale come area del trapezoide associato alla funzione. Di seguito mostriamo come queste definizioni si possono generalizzare a intervalli qualsiasi. Sottolineiamo che l'integrale generalizzato non e′ sempre defin to, e quando e′ definito puo′ essere un numero reale, $+\infty$ o $-\infty$.

Definizione 3 *Sia $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ una funzione continua; si dice che f e′ integrabile in senso generalizzato su $[a, +\infty[$ se e solo se esiste (finito o infinito) il limite dell'integrale di f su $[a, b[$ per $b \to +\infty$; l'eventuale limite si dice integrale generalizzato (di Riemann) di f su $[a, +\infty[$; si pone*

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx.$$

Se f e′ non negativa, si definisce area del trapezoide di f su $[a, +\infty[$ il numero reale dato da questo integrale.
Un'analoga definizione si da′ per una funzione continua $f :]-\infty, b] \to \mathbb{R}$.

Esempi.

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{1}{x}\,dx$$
$$= \lim_{b\to+\infty}[\log x]_1^b = \lim_{b\to+\infty}\log b = +\infty$$
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{1}{x^2}\,dx$$
$$= \lim_{b\to+\infty}[-\frac{1}{x}]_1^b = \lim_{b\to+\infty}(-\frac{1}{b}+1) = 1$$
$$\int_0^{+\infty} \cos x\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b \cos x\,dx$$
$$= \lim_{b\to+\infty}[\sin x]_0^b = \lim_{b\to+\infty}\sin b \quad \text{non esiste}$$

Dai primi due integrali generalizzati si ha che
-l'area del trapezoide della funzione $\frac{1}{x}$ ($x \in [1, +\infty[$) e' $+\infty$,
-l'area del trapezoide della funzione $\frac{1}{x^2}$ ($x \in [1, +\infty[$) e' 1.

Definizione 4 *Sia $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua; si dice che f e' integrabile in senso generalizzato su $]a, b]$ se e solo se esiste (finito o infinito) il limite dell'integrale di f su $[c, b]$ per $c \to a^+$; l'eventuale limite si dice integrale generalizzato (di Riemann) di f su $]a, b]$; si pone*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)dx.$$

Se f e' non negativa, si definisce area del trapezoide di f su $]a, b]$ il numero reale dato da questo integrale.
Un'analoga definizione si da' per una funzione continua $f : [a, b[\to \mathbb{R}$.

L'uso tipico di questo integrale si ha nel caso in cui la funzione f non puo' essere estesa con continuita' sull'intervallo chiuso $[a, b]$, in particolare nel caso in cui $f(x)$ tende a $+\infty$ o a $-\infty$ per x che tende ad uno dei due estremi.

Esempi.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{x}\, dx &= \lim_{c \to 0^+} \int_c^1 \frac{1}{x}\, dx \\
&= \lim_{c \to 0^+} [\log x]_c^1 = \lim_{c \to 0^+} (-\log c) = +\infty \\
\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx &= \lim_{c \to 0^+} \int_c^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx \\
&= \lim_{c \to 0^+} [2\sqrt{x}]_c^1 = \lim_{c \to 0^+} 2(1 - \sqrt{c}) = 2
\end{aligned}$$

Dunque:
-l'area del trapezoide della funzione $\frac{1}{x}$ ($x \in]0, 1]$) e' $+\infty$,
-l'area del trapezoide della funzione $\frac{1}{x^2}$ ($x \in]0, 1]$) e' 2.