Integrali

Punti principali della lezione precedente

- Problema della misurazione delle aree.
- Per una funzione f continua su un intervallo $[a, b]$, definizione di Integrale
$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{dx}$$
(mediante somme inferiori e somme superiori).
- Definzione di area del trapezoide di una funzione continua non negativa su un intervallo.
- Proprietà degli integrali (analogia con proprietà delle sommatorie).
-Funzione Integrale. Per una funzione f continua su un intervallo I e un punto $c \in I$ fissato, definizione della funzione integrale di f con punto base c come la funzione $I_{f,c}$ su I data da
$$I_{f,c}(x) = \int_c^x f(t)\ \mathrm{dt}$$
-Teorema fondamentale. Per ciascuna funzione f continua su un intervallo I, ciascuna funzione integrale $I_{f,c}$ è derivabile su I, inoltre
$$I'_{f,c}(x) = f(x), \quad \forall x \in I.$$
-Primitive. Una $F : A \to \mathbb{R}$ si dice primitiva di una $f : A \to \mathbb{R}$ se F è derivabile su A e
$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in A.$$
-Proposizione. Se F_0 è una primitiva di una f su un intervallo I, allora le primitive di f su I sono tutte e sole le funzioni $F_0 + c$, dove c è una costante in $\mathbb{R}$.
-Teorema (Formula di Torricelli). Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua, e sia $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ una sua primitiva. Allora
$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{dx} = [F(x)]_a^b, \qquad \text{dove} \quad [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$
-Integrali generalizzati. Si definisce l'integrale generalizzato di una funzione continua f su un intervallo $[a, +\infty[$ come
$$\int_a^{+\infty} f(x)\ \mathrm{dx} = \lim_{\beta \to +\infty} \int_a^\beta f(x)\ \mathrm{dx};$$
analogamente per una f su un intervallo $]-\infty, b]$.
Si definisce l'integrale generalizzato di una funzione continua f su un intervallo $[a, b[$ come
$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{dx} = \lim_{\beta \to b^-} \int_a^\beta f(x)\ \mathrm{dx};$$
analogamente per una f su un intervallo $]a, b]$.

Calcolo di integrali mediante primitive

0.0.1 Primitive elementari

Grazie alla formula di Torricelli, si può cercare di calcolare un integrale cercando una primitiva della funzione integranda.

Alcune primitive elementari

f	F	
x^α	$x^{\alpha+1}/(\alpha+1)$	
x^{-1}	$\log\|x\|$	$x \in \mathbb{R}_{\neq 0}$
e^x	e^x	$x \in \mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$x \in \mathbb{R}$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$x \in \mathbb{R}$

Nella prima riga della tabella, si intende che le funzioni f e F hanno dominio $\mathbb{R}, \mathbb{R}_{\neq 0}, \mathbb{R}_{>0}$ a secondo della natura di α. Per ciascuna riga della tabella, la funzione F è una delle primitive della funzione f sul dominio dichiarato. Se il dominio è un intervallo, tutte le primitive di f si ottengono da F aggiungendo una costante; se il dominio è $\mathbb{R}_{\neq 0}$, tutte le primitive di f si ottengono da F aggiungendo una costante su $\mathbb{R}_{<0}$ ed una su $\mathbb{R}_{>0}$.

Osserviamo inoltre che
-se f e g sono due funzioni aventi lo stesso dominio e F e G sono primitive di f e g, allora $F+G$ è una primitiva della funzione $f+g$;
-se F è una primitiva di una funzione f ed α è un numero reale, allora αF è una primitiva della funzione αf.

Di seguito si riportano alcuni esempi di calcolo di integrali usando la formula di Torricelli, le primitive elementari, e le proprietà di linearità delle primitive.

Esempio

$$\begin{aligned}\int_1^4 \left(\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)\,\mathrm{dx} &= \int_1^4 \left(x^{1/2}+2x^{-1/2}\right)\,\mathrm{dx}\\ &= \left[x^{3/2}/(3/2)+2x^{1/2}/(1/2)\right]_1^4 = \left[(2/3)\sqrt{x^3}+4\sqrt{x}\right]_1^4\\ &= 16/3+8-(2/3+4) = 26/3\end{aligned}$$

Commenti: questo integrale ha senso in quanto la funzione integranda è definita e continua su $[1,4]$; il risultato $26/3$ trovato è la misura dell'area del trapezoide della funzione sull'intervallo $[1,4]$.

Esempio

$$\int_{-1}^{-1/2} \frac{\mathrm{dx}}{x} = [\log|x|]_{-1}^{-1/2} = \log(1/2) - \log(1) = \log(1/2)$$

Commenti: questo integrale ha senso in quanto la funzione integranda è definita e continua su $[-1, -1/2]$; il risultato $\log(1/2)$ trovato è negativo, ed è l'opposto della misura dell'area del trapezoide della funzione sull'intervallo $[-1, -1/2]$.

Esempio

$$\int_0^{\pi} \sin(x)\,\mathrm{dx} = [-\cos(x)]_0^{\pi} = -\cos(\pi) + \cos(0) = 2.$$

Varianti delle primitive eementari

Dalla regola di derivazione delle funzioni composte e dalla formula di Torricelli si ottiene la seguente formula di integrazione

$$\int_a^b f'(g(x))g'(x)\,\mathrm{dx} = [(f \circ g)(x)]_a^b$$

dove g, definita su $[a, b]$, ed f sono due funzioni derivabili nei loro domini, tali che esista la funzione composta $f \circ g$, e tali che le funzioni derivata di f e g siano continue.

In particolare, prendendo come f una delle funzioni con primitiva elementare della tabella di sopra, si hanno le seguenti formule di integrazione

$$\begin{aligned}
&\int_a^b (g(x))^{\alpha} g'(x)\,\mathrm{dx} = \left[(g(x))^{\alpha+1}/(\alpha+1)\right]_a^b,\\
&\int_a^b \frac{g'(x)}{g(x)}\,\mathrm{dx} = [\log|g(x)|]_a^b,\\
&\int_a^b e^{g(x)} g'(x)\,\mathrm{dx} = \left[e^{g(x)}\right]_a^b,\\
&\int_a^b \cos g(x)\; g'(x)\,\mathrm{dx} = [\sin g(x)]_a^b,\\
&\int_a^b \sin g(x)\; g'(x)\,\mathrm{dx} = [-\cos g(x)]_a^b
\end{aligned}$$

Qui si assume che la funzione g soddisfi le dovute condizioni che assicurano l'esistenza della funzione integranda e dell'integrale.

Esempio

$$\int_a^b \frac{1}{3x+5}\mathrm{dx} = \frac{1}{3}\int_a^b \frac{3}{3x+5}\mathrm{dx} = \frac{1}{3}\,[\log|3x+5|]_a^b;$$

(sotto la condizione che l'intervallo $[a, b]$ sia contenuto nell'intervallo $]-\infty, -5/3[$ o nell'intervallo $]-5/3, +\infty[$.)

Esempio

$$\int_a^b x e^{x^2}\,\mathrm{dx} = \frac{1}{2}\int_a^b 2x e^{x^2}\,\mathrm{dx} = \frac{1}{2}\left[e^{x^2}\right]_a^b.$$

0.0.2 Integrazione per parti

Nel seguito, scriveremo $\int \cdots$ dx e $[\cdots]$ per intendere $\int_a^b \cdots$ dx e $[\cdots]_a^b$, dove a, b sono costanti che soddisfano le dovute codizioni e rimangono invariate nello sviluppo di ciascuna espressione.

Alla relazione fra derivazione e prodotto

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

(sotto dovute condizioni per f e g) corrisponde la seguente relazione fra integrazione e prodotto

$$\int \left(f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\right) \mathrm{d}x = [f(x)g(x)],$$

(sotto dovute condizioni per f e g), cioe'

$$\int f'(x)g(x)\mathrm{d}x + \int f(x)g'(x)\mathrm{d}x = [f(x)g(x)],$$

che puo' essere riscritta

$$\int f'(x)g(x)\mathrm{d}x = [f(x)g(x)] - \int f(x)g'(x)\mathrm{d}x,$$

o , psicologicamente diversa ma logicamente equivalente,

$$\int f(x)g'(x)\mathrm{d}x = [f(x)g(x)] - \int f'(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

Questa formula viene detta formula di integrazione per parti. L'uso tipico è il seguente. Si vuole integrare una funzione $h(x)$; per ogni scrittura di $h(x)$ del tipo $h(x) = f'(x)g(x)$, la formula permette di ricondurre l'integrazione di $h(x)$ alla integrazione della funzione $f(x)g'(x)$; l'applicazione della formula ha successo se quest'ultima funzione è piu' facile da integrare della prima.

Esempio. Si vuole calcolare l'integrale $\int xe^x \mathrm{d}x$.

Tentativo 1.

$$\int \underbrace{x}_{\mathrm{f}'} \underbrace{e^x}_{\mathrm{g}} \mathrm{d}x = [\underbrace{\frac{x^2}{2}}_{\mathrm{f}} \underbrace{e^x}_{\mathrm{g}}] - \int \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{\mathrm{f}} \underbrace{e^x}_{\mathrm{g}'} \mathrm{d}x;$$

con i metodi e i fatti finora disponibili non sappiamo integrare la funzione $\frac{x^2}{2}e^x$, il tentativo non ha avuto successo.

Tentativo 2.

$$\int \underbrace{x}_{\mathrm{f}} \underbrace{e^x}_{\mathrm{g}'} \mathrm{d}x = [\underbrace{x}_{\mathrm{f}} \underbrace{e^x}_{\mathrm{g}}] - \int \underbrace{1}_{\mathrm{f}'} \underbrace{e^x}_{\mathrm{g}} \mathrm{d}x$$
$$= [xe^x] - [e^x] = [(x-1)e^x].$$

Esempio. Si vuole calcolare l'integrale $\int x^2 e^x \mathrm{d}x$.

Si ha
$$\int \underbrace{x^2}_{\text{f}}\underbrace{e^x}_{\text{g}'}\,\mathrm{d}x = [\underbrace{x^2}_{\text{f}}\underbrace{e^x}_{\text{g}}] - \int \underbrace{2x}_{\text{f}'}\underbrace{e^x}_{\text{g}}\,\mathrm{d}x$$
$$= [x^2e^x] - 2[(x-1)e^x] = [(x^2-2x+2)e^x].$$
Esempio. Si vuole calcolare l'integrale $\int \log x \,\mathrm{d}x$.
Si ha
$$\int \log x \,\mathrm{d}x = \int \underbrace{1}_{\text{f}'}\underbrace{\log x}_{\text{g}}\,\mathrm{d}x = [\underbrace{x}_{\text{f}}\underbrace{\log x}_{\text{g}}] - \int \underbrace{x}_{\text{f}}\underbrace{\frac{1}{x}}_{\text{g}'}\,\mathrm{d}x$$
$$= [x\log x] - [x] = [x(\log x - 1)].$$
Esempio. Si vuole calcolare l'integrale $\int x\log x \,\mathrm{d}x$.
Si ha
$$\int \underbrace{x}_{\text{f}'}\underbrace{\log x}_{\text{g}}\,\mathrm{d}x = [\underbrace{\frac{x^2}{2}}_{\text{f}}\underbrace{\log x}_{\text{g}}] - \int \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{\text{f}}\underbrace{\frac{1}{x}}_{\text{g}'}\,\mathrm{d}x$$
$$= [\tfrac{x^2}{2}\log x] - [\tfrac{x^2}{4}] = [\tfrac{x^2}{2}(\log x - \tfrac{1}{2})].$$
Si lascia al lettore di verificare la correttezza dei risultati ottenuti.

Da un grafico qualitativo di una funzione a un grafico qualitativo di una sua funzione integrale

Nel piano cartesiano, sia $\mathcal{F}$ la linea unione della semicirconferenza che ha per diametro il segmento di estremi $(0,0)$ e $(4,0)$ e passa per $(2,2)$ e della semicirconferenza che ha per diametro il segmento di estremi $(0,4)$ e $(0,6)$ e passa per $(5,-1)$, e sia $f : [0,6] \to \mathbb{R}$ la funzione che ha come grafico la linea $\mathcal{F}$. Ci poniamo il problema di dare una rappresentazione qualitativa del grafico della funzione integrale $I_{f,0}$ di f con punto base 0,
$$I_{f,0} : [0,6] \to \mathbb{R}, \quad I_{f,0}(x) = \int_0^x f(x)\,\mathrm{dx},\ (x \in [0,6]),$$
senza cercare di dare una descrizione analitica della funzione f e senza calcolare l'integrale che definisce $I_{f,0}$.

Osserviamo che f è continua sull'intervallo $[0,6]$, non negativa su $[0,4]$ e non positiva su $[4,6]$. Si hanno i seguenti valori di $I_{f,0}$:

x	0	2	4	5	6
$I_{f,0}(x)$	0	π	2π	$\cdots$	$\cdots$

il valore in $x = 0$ segue dalla definizione, i valori in $x = 2$ e $x = 4$ seguuono dalla interpretazione dell'integrale di f come area; si lascia al lettore di completare la tabella.

Per il teorema fondamentale, $I_{f,0} : [0,6] \to \mathbb{R}$ è derivabile su $[0,6]$ e

$$I'_{f,0}(x) = f(x), \quad \forall x \in [0,6].$$

Si hanno i seguenti valori di $I'_{f,0}$:

x	$]0,4[$	4	$]4,6[$
$I'_{f,0}(x)$	> 0	0	< 0

dunque: $I_{f,0}$ è strettamente crescente su $]0,4[$, ha un massimo locale in $x = 4$, ed è strettamente decrescente su $]4,6[$.

La funzione f è derivabile negli intervalli $]0,4[$ e $]4,6[$. Come conseguenza del teorema fondamentale, $I_{f,0} : [0,6] \to \mathbb{R}$ è due volte derivabile su tali intervalli e

$$I''_{f,0}(x) = f'(x), \quad \forall x \in]0,4[\cup]4,6[.$$

Si hanno i seguenti valori di $I''_{f,0}$:

x	$]0,2[$	2	$]2,5[$	5	$]5,6[$
$I''_{f,0}(x)$	> 0	0	< 0	$\cdots$	$\cdots$

dunque: $I_{f,0}$ ha concavità rivolta verso l'alto su $]0,2[$, ha un punto di flesso in $x = 2$, ha concavità rivolta verso il basso su $]2,5[$, ... Osserviamo che la retta tangente al grafico di $I_{f,0}$ nel punto di flesso $x = 2$ ha equazione

$$y - I_{f,0}(2) = I'_{f,0}(2)(x-2), \quad \text{cioè} \quad y - \pi = 2(x-2).$$

Lasciamo al lettore il compito di completare la descrizione qualitativa del grafico di $I_{f,0}$.