Autovettori e autovalori

Soluzione di alcuni esercizi

1. Per ciascuna delle seguenti matrici si determini se possibile:

   - una base di $\mathbb{R}^2$ costituita da autovettori;

   - una base ortogonale di $\mathbb{R}^2$ costituita da autovettori;

   - una base ortonormale di $\mathbb{R}^2$ costituita da autovettori.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \quad S = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Svolgimento (parziale).

Consideriamo la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Cerchiamo gli autovalori di A. Il polinomio caratteristico di A è il polinomio nella indeterminata λ

$$|A - \lambda I_2| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 + 1;$$

questo polinomio non ha alcuna radice in $\mathbb{R}$, dunque la matrice A non ha alcun autovalore in $\mathbb{R}$ e non ha alcun autovettore in $\mathbb{R}^2$.

Consideriamo la matrice

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Cerchiamo gli autovalori di B. Il polinomio caratteristico di B è il polinomio nella indeterminata λ

$$|B - \lambda I_2| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2;$$

questo polinomio ha solo la radice $\lambda = 1$, dunque la matrice A non ha solo l'autovalore $\lambda = 1$.

Consideriamo l'autospazio V_1 associato all'autovalore $\lambda = 1$, cioè l'insieme degli $x \in \mathbb{R}^2$ tali che $Bx = x$, o che è lo stesso, $(B - I_2)x = 0_2$, esplicitamente

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{cioè} \qquad 2x_2 = 0.$$

Le soluzioni sono le coppie $(t, 0)$ ottenute al variare di $t \in \mathbb{R}$. Tutti gli autovettori di B stanno sul primo asse coordinato, dunque non esistono due autovettori di B linearmente indipendenti, e non esiste alcuna base di $\mathbb{R}^2$ di autovettori di B.

Consideriamo la matrice
$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}.$$
Cerchiamo gli autovalori di P. Il polinomio caratteristico di P è il polinomio nella indeterminata λ
$$|P - \lambda I_2| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4;$$
questo polinomio ha le radici $\lambda = -1$ e $\lambda = 3$, dunque la matrice P ha gli autovalori $\lambda = -1$ e $\lambda = 3$. Possiamo dunque prendere un autovettore per ciascun autovalore, ed un teorema visto ci assicura che tali autovettori saranno linearmente indipendenti, e dunque una base di $\mathbb{R}^2$.

Consideriamo l'autospazio V_{-1} associato all'autovalore $\lambda = -1$, cioè l'insieme degli $x \in \mathbb{R}^2$ tali che $Px = -x$, o che è lo stesso, $(P + I_2)x = 0_2$, esplicitamente
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}, \quad \text{cioè} \quad 2x_1 + x_2 = 0.$$
Le soluzioni sono le coppie $(t, -2t)$ ottenute al variare di $t \in \mathbb{R}$. Un autovettore è $(-2, 1)$.

Consideriamo l'autospazio V_3 associato all'autovalore $\lambda = 3$, cioè l'insieme degli $x \in \mathbb{R}^2$ tali che $Px = 3x$, o che è lo stesso, $(P - 3I_2)x = 0_2$,

esplicitamente
$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} -2x_1 + x_2 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}, \quad \text{cioè} \quad -2x_1 + x_2 = 0.$$
Le soluzioni sono le coppie $(2t, t)$ ottenute al variare di $t \in \mathbb{R}$. Un autovettore è $(2, 1)$.

Dunque esiste una base di $\mathbb{R}^2$ costituita da autovettori di P, ed è $(-2, 1), (2, 1)$ Non esiste alcuna base ortogonale (e a maggior ragione nessuna base ortonormale) di $\mathbb{R}^2$ costituita da autovettori di P.

La considerazione della matrice
$$P = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$
viene lasciata al lettore.

2. Per ciascuna delle seguenti matrici si determini se possibile:

   - una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori;
   - una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Consideriamo solo la matrice

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

questa matrice è simmetrica, dunque per il teorema spettrale esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ di autovettori di T. Cerchiamo gli autovalori di T. Il polinomio caratteristico di T è il polinomio nella indeterminata λ

$$|T - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-1+\lambda^2) = -(1-\lambda)^2(1+\lambda);$$

questo polinomio ha le radici $\lambda = 1$ e $\lambda = -1$, dunque la matrice T ha gli autovalori $\lambda = 1$ e $\lambda = -1$.

Consideriamo l'autospazio V_1 associato all'autovalore $\lambda = 1$, cioè l'insieme degli $x \in \mathbb{R}^3$ tali che $Tx = x$, o che è lo stesso, $(T - I_3)x = 0_3$, esplicitamente

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{cioè} \quad \left\{ x_1 - x_2 = 0 \right. .$$

Le soluzioni sono date da $x_1 = x_2$ con x_2 libera e x_3 libera; in altri termini, sono le terne

$$(t, t, s), \qquad (s, t \in \mathbb{R}).$$

Consideriamo l'autospazio V_{-1} associato all'autovalore $\lambda = -1$, cioè l'insieme degli $x \in \mathbb{R}^3$ tali che $Tx = -x$, o che è lo stesso, $(T + I_3)x = 0_3$, esplicitamente

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_3 = 0 \end{cases} .$$

Le soluzioni sono date da $x_1 = -x_2$ con x_2 libera e $x_3 = 0$; in altri termini, sono le terne

$$(-r, r, 0), \qquad (r \in \mathbb{R}).$$

Osserviamo che ciascun vettore (t,t,s) in V_1 è ortogonale a ciascun vettore $(-r,r,0)$ in V_{-1} (come previsto dal teorema spettrale). In V_1 prendiamo i vettori fra loro ortogonali $(1,1,0)$ e $(0,0,1)$ e in V_{-1} prendiamo il vettore $(1,-1,0)$; i tre vettori $(1,1,0),(0,0,1),(1,-1,0)$ formano una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$. Normalizzando ciascuno di questi vettori, si ottiene la base ortonormale di $\mathbb{R}^3$

$$(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0),\ (0,0,1),\ (\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0).$$