Integrazione per parti. II

La regola di integrazione per parti

$$\int_a^b f'(x)g(x)\ \mathrm{dx} = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\ \mathrm{dx}$$

(f, g funzioni derivabili con funzione derivata continua su $[a, b]$), applicata ripetutamente, permette in particolare di integrare le seguenti famglie di funzioni.

- Potenze ad esponente numero naturale per esponenziale.
L'integrale di e^x è

$$\int_a^b e^x\ \mathrm{dx} = [e^x]_a^b;$$

l'integrale di xe^x si puo' ricondurre all'integrale di e^x in quanto

$$\int_a^b xe^x\ \mathrm{dx} = [xe^x]_a^b - \int_a^b e^x\ \mathrm{dx}$$

(regola applicata con $f(x) = e^x$ e $g(x) = x$);
l'integrale di x^2e^x si puo' ricondurre all'integrale di xe^x in quanto

$$\int_a^b x^2e^x\ \mathrm{dx} = [x^2e^x]_a^b - \int_a^b 2xe^x\ \mathrm{dx}$$

(regola applicata con $f(x) = e^x$ e $g(x) = x^2$); ...
Per ogni numero naturale positivo $n = 1, 2, 3, \ldots$ l'integrale di $x^n e^x$ si puo' ricondurre all'integrale di $x^{n-1}e^x$ in quanto

$$\int_a^b x^n e^x\ \mathrm{dx} = [x^n e^x]_a^b - \int_a^b n x^{n-1} e^x\ \mathrm{dx}.$$

- Potenze ad esponente reale per logaritmo.
L'integrale di una funzione del tipo $x^\alpha \log x$, con $\alpha \neq -1$, si puo' ricondurre all'integrale di una funzione potenza in quanto

$$\int_a^b x^\alpha \log x\ \mathrm{dx} = \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\log x\right]_a^b - \int_a^b \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\,\frac{1}{x}\ \mathrm{dx}$$

(regola applicata con $f(x) = x^\alpha$ e $g(x) = \log x$).
Inoltre, per $\alpha = -1$ si ha

$$\int_a^b x^{-1}\log x\ \mathrm{dx} = \left[\frac{\log^2 x}{2}\right]_a^b.$$

Integrazione per sostituzione

Un'ultimo metodo di integrazione è dato dalla seguente

Proposizione 1 *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua e sia $\varphi : [\alpha, \beta] \to I$ una funzione derivabile con funzione derivata continua. Allora*

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\, dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\, \varphi'(u)\, du$$

Esempio. Consideriamo l'integrale

$$\int_1^4 e^{\sqrt{x}}\, \mathrm{dx}$$

La funzione integranda è defnita e continua su $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Si ha

$$\int_1^4 e^{\sqrt{x}}\, \mathrm{dx} = \int_\alpha^\beta e^{\sqrt{\varphi(u)}}\, \varphi'(u)\, \mathrm{du},$$

per ciascuna funzione $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ derivabile con funzione derivata continua, tale che $\varphi(\alpha) = 1$ e $\varphi(\beta) = 4$.
Scelta la funzione $\varphi(u) = u^2$ e scelti i punti $\alpha = 1$ e $\beta = 2$ si ha

$$\begin{aligned} \int_1^4 e^{\sqrt{x}}\, \mathrm{dx} &= \int_1^2 e^{\sqrt{u^2}}\, 2u\, \mathrm{du} \\ &= \int_1^2 e^{|u|}\, 2u\, \mathrm{du} \\ &= \int_1^2 e^{u}\, 2u\, \mathrm{du} \\ &= 2\left[ue^u - e^u\right]_1^2 = 2e^2. \end{aligned}$$

Esempio. In modo analogo si può calcolare l'integrale

$$\int_0^1 e^{\sqrt[3]{x}}\, \mathrm{dx};$$

lo si lascia come compito al lettore.

Integrali generalizzati. II

Di seguito consideriamo integrali generalizzati, su intervalli del tipo $[a, +\infty[$ di funzioni potenza ed esponenziali.

Funzione potenza con esponente $\alpha \neq -1$ su $[1, +\infty[$.

$$\begin{aligned}
\int_1^{+\infty} x^\alpha \, \mathrm{dx} &= \lim_{b \to +\infty} \int_1^b x^\alpha \, \mathrm{dx} \\
&= \lim_{b \to +\infty} \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right]_1^b \\
&= \lim_{b \to +\infty} \left(\frac{b^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1} \right) = \begin{cases} -\frac{1}{\alpha+1} & \text{se } \alpha+1 < 0 \text{ cioè } \alpha < -1 \\ +\infty & \text{se } \alpha > -1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Funzione potenza con esponente -1 su $[1, +\infty[$.

$$\begin{aligned}
\int_1^{+\infty} x^{-1} \, \mathrm{dx} &= \lim_{b \to +\infty} \int_1^b x^{-1} \, \mathrm{dx} \\
&= \lim_{b \to +\infty} [\log x]_1^b \\
&= \lim_{b \to +\infty} \log b = +\infty
\end{aligned}$$

Funzione esponenziali su $[0, +\infty[$.

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} e^{\alpha x} \, \mathrm{dx} &= \lim_{b \to +\infty} \int_0^b e^{\alpha x} \, \mathrm{dx} \\
&= \lim_{b \to +\infty} \left[\frac{e^{\alpha x}}{\alpha} \right]_1^b \\
&= \lim_{b \to +\infty} \left(\frac{e^{\alpha b}}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} \right) = \begin{cases} -\frac{1}{\alpha} & \text{se } \alpha < 0 \\ +\infty & \text{se } \alpha > 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

In generale, si ha la seguente

Proposizione 2 *Sia $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ una funzione continua non negativa su un intervallo chiuso inferiormente limitato e superiormente illimitato. Allora: (1) esiste l'integrale generalizzato $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$, ed è finito (maggiore-uguale a 0) o $+\infty$; (2) l'integrale generalizzato $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ è finito se e solo se l'insieme degli integrali $\int_a^b f(x)\, dx$ (ottenuti al variare di b, con $b \geq a$) è superiormente limitato; in tal caso, l'integrale generalizzato è uguale all'estremo superiore degli integrali.*

Questa proposizione è una conseguenza del fatto che, sotto le ipotesi fatte, la funzione integrale $I_{f,a} : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ è crescente [1] Valgono risultati analoghi per fun-

[1] Essendo f non negativa su $[a, +\infty[$, per ogni $x_2 \geq x_1 \geq a$ si ha

$$\begin{aligned}
I_{f,a}(x_2) - I_{f,a}(x_1) &= \int_a^{x_2} f(x) \, \mathrm{dx} - \int_a^{x_1} f(x) \, \mathrm{dx} \\
&= \int_a^{x_2} f(x) \, \mathrm{dx} + \int_{x_1}^{a} f(x) \, \mathrm{dx} \\
&= \int_{x_1}^{x_2} f(x) \, \mathrm{dx} \geq 0
\end{aligned}$$

zioni non negative su intervalli chiusi inferiormente illimitati e superiormente limitati, o su intervalli limitati contenenti uno solo dei due estremi.

Un'altra primitiva elementare

Si è visto che la funzione tangente con dominio ristretto $\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ è invertibile; la sua funzione inversa $\mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ si è detta "arco tangente" e denotata $\arctan$. Si è inoltre visto che queste funzioni sono derivabili nel loro dominio, con funzioni derivata

$$\begin{aligned} \tan' x &= 1 + (\tan x)^2 & \qquad & \forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\\ \arctan' x &= \frac{1}{1+x^2} & & \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

In particolare, si ha che la funzione

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$$

ha come funzioni primitive le funzioni

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \arctan x + c \qquad (c \text{ costante } \in \mathbb{R}).$$

Integrali generalizzati. III

Sotto dovute condizioni, si possono dare nozioni più generali di integrale generalizzato. In questa sezione mostriamo solo come si possa definire l'integrale generalizzato su $\mathbb{R}$ di una funzione non negativa.

Proposizione 3 *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua non negativa. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti*

(1) per ogni $a \in \mathbb{R}$ esiste finito $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$, ed esiste finito il limite

$$\lim_{a \to -\infty} \int_a^{+\infty} f(x)\, dx$$

(2) per ogni $b \in \mathbb{R}$ esiste finito $\int_{-\infty}^b f(x)\, dx$, ed esiste finito il limite

$$\lim_{b \to +\infty} \int_{-\infty}^b f(x)\, dx$$

In caso affermativo, i due limiti sono uguali; il loro valore comune si dice "integrale generalizzato" su $\mathbb{R}$ della funzione f e si indica con

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx.$$

In altri termini, si pone

$$\lim_{a\to-\infty}\left(\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}\right)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{dx}=\lim_{b\to+\infty}\left(\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}\right).$$

Esempio Per la funzione non negativa $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto 1/(1+x^2)$ si ha

$$\int_a^b \frac{\mathrm{dx}}{1+x^2}=[\arctan x]_a^b=\arctan b-\arctan a.$$

Dunque

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{dx}}{1+x^2}&=\lim_{a\to-\infty}\left(\lim_{b\to+\infty}\int_a^b\frac{\mathrm{dx}}{1+x^2}\right)\\&=\lim_{a\to-\infty}\left(\lim_{b\to+\infty}(\arctan b-\arctan a)\right)\\&=\lim_{a\to-\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan a\right)\\&=\frac{\pi}{2}-(-\frac{\pi}{2})=\pi.\end{aligned}$$

Integrabilità e integrale per funzioni non necessariamente continue

Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una funzione limitata. In modo analogo a quanto fatto in precedenza nel caso f funzione continua, ma usando estremi superiori al posto dei massimi ed estremi inferiori al posto dei minimi, si possono definire le somme inferiori di f $s_1\leq s_2\leq s_4\leq\cdots$ e si possono definire le somme superiori di f $S_1\geq S_2\geq S_4\geq\cdots$
Si dice che f è integrabile su $[a,b]$ se l'estremo superiore delle somme inferiori è uguale all'estremo inferiore delle somme superiori

$$\mathrm{Sup}_n\, s_n=\mathrm{Inf}_n\, S_n;$$

in tal caso, il valore comune dei due estremi si dice integrale di f su $[a,b]$ e si indica con

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}.$$

Una funzione $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ si dice "continua a tratti" se esiste una suddivisione $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_p=b$ dell'intervallo $[a,b]$ tale che
(1) f è continua in ogni intervallo $]x_0,x_1[,\ ]x_1,x_2[,\ \ldots,\ ]x_{p-2},x_{p-1}[,\ ]x_{p-1},x_p[$;
(2) esistono finiti $\lim_{x\to x_i^-} f(x)$ e $\lim_{x\to x_i^+} f(x)$, per ogni $i=1,\ldots,p-1$.

Ogni funzione continua su un intervallo $[a,b]$ è continua a tratti su tale intervallo (con suddivisione $a=x_0<x_1=b$).

Teorema 1 *Fra le funzioni limitate su un intervallo* $[a,b]$*, in particolare sono integrabili:*
- le funzioni continue a tratti su $[a,b]$*;*
- le funzioni monotone su $[a,b]$.

Non tutte le funzioni limitate su un intervallo chiuso e limitato sono integrabili. [2]

Le proprietà di linearità, monotonia e additività, evidenziate per gli integrali delle funzioni continue, continuano a valere per le funzioni integrabili. Il teorema fondamentale vale nella forma seguente

Teorema 2 *Sia* $f : I \to \mathbb{R}$ *una funzione definita su un intervallo* I *ed integrabile su ogni intervallo* $[a,b] \subseteq I$*, e sia* $I_{f,c}$ *una sua funzione integrale. Allora:*
- $I_{f,c}$ *è continua su* I*;*
- $I_{f,c}$ *è derivabile in ogni punto* $x_0 \in I$ *nel quale* f *è continua, inoltre*

$$I'_{f,c}(x_0) = f(x_0).$$

[2]Ad esempio, per la funzione

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

si ha che: tutte le somma inferiori valgono 0 (in quanto intervallo non ridotto a un punto contiene qualche numero irrazionale) e tutte le somma superiori valgono 1 (in quanto intervallo non ridotto a un punto contiene qualche numero razionale); dunque l'estremo superiore delle somme inferiori è 0 e l'estremo inferiore delle somme superiori è 1, e i due estremi sono diversi.