Matematica - 2 novembre 2017. Versione 1

Scrivere nome, cognome e numero di matricola. Non è consentito usare libri, appunti, ..., ma solo una calcolatrice non programmabile. Ogni esercizio vale 6 punti (5 esercizi valgono 30 punti). Tempo: 1h 30′.

1. Si calcolino i seguenti limiti
$$\begin{aligned} (5^x + x^3)/(7^x + x^2), &\qquad \text{per } x \to +\infty, 0, -\infty \\ x\, \mathrm{e}^{1/x}, &\qquad \text{per } x \to 0^+, 0 \\ (\log(1+x))/\sqrt{x}, &\qquad \text{per } x \to 0^+ \end{aligned}$$

2. È data l'espressione
$$\log_2 [(5x+3)/(3x+2)].$$
Si determini l'insieme A dei punti $x \in \mathbb{R}$ per i quali l'espressione ha senso. Considerata la funzione
$$f : A \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \log_2 [(5x+3)/(3x+2)],$$
(1) si determini l'insieme C dei punti $c \in \mathbb{R}^*$ tali che $c \notin A$ ed abbia senso il limite di $f(x)$ per $x \to c$; (2) si calcolino tali limiti; (3) si dia una rappresentazione del grafico di f coerente con le informazioni raccolte.

3. Si verifichino, usando la definizione, i seguenti limiti
$$\begin{aligned} (2x-1)/(3x-1) \to 2/3 &\qquad \text{per } x \to +\infty; \\ (0.3)^x \to +\infty &\qquad \text{per } x \to -\infty. \end{aligned}$$

4. Per ciascuna delle seguenti sequenze di vettori, si dica se è linearmente indipendente; in caso negativo, si mostri che uno dei suoi vettori si può scrivere come combinazione lineare degli altri.
$$\begin{aligned} &(1,2),\ (0,1),\ (3,1); \\ &(1,5,4),\ (0,1,2),\ (2,1,1); \\ &(1,2,0,0),\ (0,1,1,0),\ (3,1,1,1). \end{aligned}$$

5. Si scriva la matrice inversa della matrice $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ e si risolvano le equazioni
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \qquad (X \text{ matrice incognita});$$
$$Y \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad (Y \text{ matrice incognita}).$$

6. Si verifichi che la sequenza $(1,-1,1), (1,-1,-2), (1,1,0)$ di vettori di $\mathbb{R}^3$ è una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$, si calcolino le coordinate del vettore $(1,1,1)$ rispetto a questa base, e si verifichi la correttezza del risultato ottenuto.