Di seguito sono esposte due possibili risoluzioni di due esercizi dati durante il corso, al solo scopo di mostrare il livello di motivazione dei passaggi al quale tendere nella risoluzione degli esercizi della prova scritta.

sett. IV es. 2.2 Per ciascuna delle seguenti funzioni: (1) si determini l'insieme C dei punti $c \in \mathbb{R}^*$ non appartenenti al dominio della funzione per i quali ha senso il limite della funzione per $x \to c$; (2) si calcolino gli eventuali limiti della funzione per x che tende a punti di C; (3) si dia una rappresentazione del grafico della funzione coerente con le informazioni ottenute.

$$g(x) = \log\left(\frac{x}{x^2-1}\right), \quad (x \in]-1,0[\cup]1,+\infty[).$$

Risoluzione parziale: Punto (1) e parte del punto (2).

(1) L'insieme dei punti $c \in \mathbb{R}$ per i quali ha senso il limite di $h(x)$ per $x \to c$ è $[-1,0] \cup [1,+\infty[$ (insieme dei punti di accumulazione del dominio); ha senso il limite per $x \to +\infty$ (il dominio è superiormente illimitato). non ha senso il limite per $x \to -\infty$ (il dominio non è inferiormente illimitato). Dunque

$$C = \{-1, 0, 1, +\infty\}.$$

(2) Considero

$$\lim_{x\to -1} \log\left(\frac{x}{x^2-1}\right) = \lim_{x\to -1^+} \log\left(\frac{x}{x^2-1}\right)$$

Si ha

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{x}{x^2-1} = +\infty$$

(numeratore $\to -1$ e denominatore $\to 0^-$) e

$$\lim_{x\to +\infty} \log x = +\infty.$$

Dunque

$$\lim_{x\to -1^+} \log\left(\frac{x}{x^2-1}\right) = \lim_{x\to +\infty} \log x = +\infty.$$

Considero

$$\lim_{x\to 0} \log\left(\frac{x}{x^2-1}\right) = \lim_{x\to 0^-} \log\left(\frac{x}{x^2-1}\right)$$

Si ha

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x}{x^2-1} = 0^+$$

(numeratore $\to 0^-$ e denominatore $\to -1$) e

$$\lim_{x\to 0^+} \log x = -\infty.$$

Dunque

$$\lim_{x\to 0^-} \log\left(\frac{x}{x^2-1}\right) = \lim_{x\to 0^+} \log x = -\infty.$$

sett. II es. 9 Per ciascuna delle seguenti sequenze di vettori di $\mathbb{R}^4$, stabilire se è linearmente indipendente

$$(2,-3,1,4),\ (0,3,-4,2),\ (0,0,4,-5)$$
$$(1,0,1,2),\ (0,1,2,3),\ (3,-2,-1,0)$$

Risoluzione Faccio riferimento alla seguente definizione di indipendenza lineare: la frase "una sequenza di vettori è linearmente indipendente" significa "una combinazione lineare dei vettori è uguale al vettore nullo solo se i coefficienti sono tutti nulli".

Considero la prima sequenza. Considero le combinazioni lineari dei suoi vettori che risultano nel vettore nullo, cioè l'uguaglianza:

$$\alpha(2,-3,1,4)+\beta(0,3,-4,2)+\gamma(0,0,4,-5)=(0,0,0,0) \qquad (\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}).$$

Questa uguaglianza equivale al sistema

$$\begin{cases} 2\alpha=0 \\ -3\alpha+3\beta=0 \\ \alpha-4\beta+4\gamma=0 \\ 4\alpha+2\beta-5\gamma=0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} \alpha=0 \\ 3\beta=0 \\ -4\beta+4\gamma=0 \\ 2\beta-5\gamma=0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} \alpha=0 \\ \beta=0 \\ 4\gamma=0 \\ 5\gamma=0 \end{cases} ;$$

Questo sistema ha solo la soluzione $\alpha=\beta=\gamma=0$. Dunque i vettori sono linearmente indipendenti.

Considero la seconda sequenza. Considero le combinazioni lineari dei suoi vettori che risultano nel vettore nullo, cioè l'uguaglianza:

$$\alpha(1,0,1,2)+\beta(0,1,2,3)+\gamma(3,-2,-1,0)=(0,0,0,0) \qquad (\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}).$$

Questa uguaglianza equivale al sistema

$$\begin{cases} \alpha+3\gamma=0 \\ \beta-2\gamma=0 \\ \alpha+2\beta-\gamma=0 \\ 2\alpha+3\beta=0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} \alpha=-3\gamma \\ \beta=2\gamma \\ -3\gamma+2(2\gamma)-\gamma=0 \\ 2(-3\gamma)+3(2\gamma)=0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} \alpha=-3\gamma \\ \beta=2\gamma \\ 0=0 \\ 0=0 \end{cases} ;$$

questo sistema ha infinite soluzioni che dipendono da γ, in particolare per $\gamma=1$ si ha la soluzione $\alpha=-3$, $\beta=2$, $\gamma=1$ diversa dalla $\alpha=\beta=\gamma=0$. Dunque i vettori sono linearmente dipendenti.