

Matematica – I modulo; a.a. 2017-2018. Programma svolto

Analisi

Linguaggio degli insiemi.

Numeri reali. Numeri razionali; ordinamento; operazioni; rappresentazione decimale. Numeri reali; l'equazione $x^2 = 2$. Retta reale. Intervalli. Estremo superiore, estremo inferiore. Polinomi, radici; equazioni e disequazioni di secondo grado; equazioni irrazionali. Sommatorie; progressioni aritmetiche e geometriche; potenze del binomio. Potenze ad esponente naturale, intero, razionale, reale.

Funzioni reali di una variabile reale. Concetti generali; funzioni iniettive funzione inversa; composizione di funzioni. Funzioni reali di una variabile reale, grafico; funzioni monotone. Funzioni potenza; funzioni esponenziali. Logaritmi e funzioni logaritmiche. Funzioni polinomiali, in particolare di primo e secondo grado. Ordinamento parziale ed operazioni. Funzioni trigonometriche.

Limiti. Valore assoluto, distanza, intorni. Limiti a più infinito; definizioni di limite finito o infinito a più infinito; limite finito per eccesso/difetto. Limiti a meno infinito. Punti di accumulazione per un sottinsieme di \mathbb{R} . Limiti al finito; definizione di limite finito o infinito al finito; limiti al finito sinistri e destri. Limiti e ordine. Limiti e operazioni aritmetiche; somma, prodotto per scalari, prodotto, inversione, divisione; forme di indecisione. Limiti di polinomi e di funzioni razionali. Confronto fra infiniti: esponenziali, potenze e logaritmi. Relazione fra limiti a più infinito, 0^+ , 0^- e meno infinito. Limiti ed elevamento a potenza. Limiti e composizione di funzioni. Funzioni continue, funzioni elementari. Limiti notevoli; numero di Nepero; esponenziale e logaritmo; funzione seno.

Integrali. Integrale di Riemann di una funzione continua su un intervallo $[a,b]$. Definizione di area di un trapezoide, compatibilità. Integrale, proprietà. Funzione integrale. Teorema fondamentale. Primitive di una funzione. Primitive di una funzione su un intervallo. Formula di Torricelli. Calcolo di integrali mediante primitive. Primitive elementari; varianti per composizione. Integrazione per parti. Integrazione per sostituzione. Integrali generalizzati; il caso delle funzioni non negative. Integrabilità e integrale per funzioni non necessariamente continue (cenni).

Algebra Lineare

Spazi vettoriali. \mathbb{R}^2 ; sistemi di riferimento nel piano; \mathbb{R}^2 , operazioni. Vettori nel piano, operazioni. Spazi vettoriali reali; identificazione di \mathbb{R}^2 e G_O^2 ; spazio vettoriale n -dimensionale standard \mathbb{R}^n ; spazio vettoriale G_O^3 ; identificazione di \mathbb{R}^3 e G_O^3 . Equazioni lineari omogenee. Sottospazi. Vettori linearmente indipendenti. Sequenze linearmente indipendenti massimali; dimensione di uno spazio vettoriale. Dimensione dello spazio delle soluzioni di un'equazione lineare omogenea. Basi, coordinate; identificazioni con spazi vettoriali standard.

Algebra delle matrici. Prodotto di matrici; matrici unità; associatività, non commutatività; matrici invertibili, matrice inversa, proprietà. Matrice inversa ed equazioni matriciali; calcolo di coordinate e inversione di matrici. Somma di matrici, proprietà; distributività del prodotto rispetto alla somma. Trasposizione.

Spazi vettoriali euclidei. Piano vettoriale euclideo; ortogonalità e prodotto scalare; proiezione ortogonale di un vettore su un vettore, coefficienti di Fourier; basi ortogonali, coordinate. Spazio vettoriale 3-dimensionale euclideo; basi ortogonali; processo di Gram-Schmidt. Nel piano, lunghezza e prodotto scalare; proprietà; nello spazio 3-dimensionale, lunghezza e prodotto scalare. Spazio vettoriale euclideo \mathbb{R}^n ; prodotto scalare, ortogonalità e norma, proprietà; proiezioni ortogonali; ortogonalità e indipendenza lineare.

Determinanti. Determinante di matrici 2×2 ; significato geometrico; relazione con indipendenza lineare; relazione con invertibilità; formula per l'inversa. Determinante di matrici 3×3 ; sviluppi di Laplace; significato geometrico; relazione con indipendenza lineare. Proprietà. Definizione di determinante di matrici $n \times n$ tramite proprietà; relazione con indipendenza lineare ed invertibilità. Matrici non singolari.

Sistemi lineari. Sistemi lineari; rappresentazioni vettoriali e rappresentazione matriciale. Sistemi lineari di n equazioni in n incognite con una ed una sola soluzione e matrici non singolari; regola di Cramer. Rango di una matrice come massimo numero di colonne o righe linearmente indipendenti e come massimo ordine di sottomatrici quadrate non singolari. Sistemi lineari con qualche soluzione e Teorema di Rouchè-Capelli. Sistemi lineari con rango della matrice dei coefficienti uguale al numero delle equazioni. Sistemi lineari con rango della matrice completa minore del numero delle equazioni. Sistemi lineari, un metodo di risoluzione. Sistemi lineari omogenei.

Autovettori e autovalori. Funzione lineare associata a una matrice quadrata. Autovettori ed autovalori; autovalori e polinomio caratteristico; autovettori e autospazi. Basi di autovettori; matrici $n \times n$ con n autovalori distinti; matrici simmetriche, teorema spettrale. Forma quadratica associata ad una matrice simmetrica.