Lezione 1, Analisi, 18.09.2017

1 Linguaggio degli insiemi

Ricordiamo di seguito in modo informale le prime notazioni e nozioni sugli insiemi. Il discorso sugli insiemi si sviluppa a partire dai termini "elemento", "insieme", e da locuzioni come "il tal elemento appartiene (o non appartiene) al tal insieme". Si usano anche variazioni di questa locuzione, come "il tal elemento e' (o non e') del tal insieme" oppure "il tal elemento sta (o non sta) nel tal insieme", ... Di solito, indicheremo gli elementi con lettere minuscole e gli insiemi con lettere maiuscole; per indicare che un elemento a appartiene ad un insieme A scriveremo $a \in A$, per indicare che a non appartiene ad A scriveremo $a \notin A$. Si dice che insieme A e' uguale ad un insieme B, e si scrive $A = B$, se A e B hanno gli stessi elementi; in altri termini, per ogni x, x appartine ad A se e solo se x appartiene a B; questa frase si scrive

$$\forall x,\ x \in A \Leftrightarrow x \in B.$$

L'insieme che non ha alcun elemento viene detto "insieme vuoto", e viene indicato con $\emptyset$ oppure con $\{\ \}$.

Il modo piu' semplice per dare un insieme e', quando possibile, elencare i suoi elementi; di regola, si scrivono gli elementi (o i simboli che li rappresentano) racchiusi fra parentesi graffe Ad esempio, l'insieme degli elementi $2, 4, 6$ si da' con la scrittura

$$\{2, 4, 6\}$$

L'ordine con il quale vengono scritti gli elementi non e' importante, cosi' come non lo sono le eventuali ripetizioni. Cosi', le scritture $\{2, 4, 6\}$, $\{4, 2, 6\}$, $\{2, 4, 4, 6\}$ rappresentano lo stesso insieme.

Si dice che un insieme A "e' contenuto" in un insieme B, o che A e' un "sottinsieme" di B, e si scrive $A \subseteq B$, se ogni elemento che appartiene ad A appartiene anche a B; in altri termini: per ogni x, se x appartine ad A allora x appartiene a B; questa frase si scrive in breve

$$\forall x,\ x \in A \Rightarrow x \in B.$$

Si ha che un insieme A non e' contenuto in un insieme B, e si scrive $A \not\subseteq B$, se esiste un y tale che y appartiene a B e y non appartiene ad A; questa frase si scrive

$$\exists y :\ y \in B \text{ e } y \notin A.$$

Si dice che un insieme A e' contenuto strettamente in un insieme B, e si scrive $A \subset B$, se A e' contenuto in B ed $A \neq B$; in altri termini: per ogni x, se x appartiene ad A allora x appartiene a B, ed esiste un y che appartiene a B ma non appartiene ad A.

Diamo per buona una conoscienza ingenua della nozione di insieme "finito" o "infinito", e della nozione di "numero di elementi" o "cardinalita'" di un insieme finito;

indicheremo la cardinalita' di un insieme finito A col simbolo $|A|$. In un certo senso, il primo insieme infinito e' l'insieme dei numeri naturali

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\},$$

e i suoi sottinsiemi

$$\{\ \},\ \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \ldots$$

sono i "modelli" degli insiemi finiti con 0, 1, 2, 3, ... elementi; cosi'

$$|\{1, 2, \ldots, n\}| = n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Insieme delle parti. L'insieme dei sottinsiemi di un insieme A viene detto insieme delle parti di A e viene indicato con $\mathcal{P}(A)$; in simboli:

$$\mathcal{P}(A) = \{X;\ X \subseteq A\}.$$

Di seguito riportiamo gli insiemi delle parti degli insiemi prototipo con $1, 2, 3$ elementi.

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\{\}) &= \{\{\}\}; \\ \mathcal{P}(\{1\}) &= \{\{\}, \{1\}\} \\ \mathcal{P}(\{1, 2\}) &= \{\{\}, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\} \\ \mathcal{P}(\{1, 2, 3\}) &= \{\{\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\} \end{aligned}$$

Osserviamo che

$$|\mathcal{P}(\{\})| = 1, \quad |\mathcal{P}(\{1\})| = 2, \quad |\mathcal{P}(\{1, 2\})| = 4, \quad |\mathcal{P}(\{1, 2, 3\})| = 8;$$

cio' fa pensare che

$$|\mathcal{P}(\{1, 2, \ldots, n\})| = 2^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

E cosi' e'. Infatti, per ogni n fissato, un sottinsieme X dell'insieme $\{1, 2, \ldots, n\}$ e' individuato da una serie di risposte si/no alle seguenti domande:

$$1 \in X? \quad 2 \in X? \quad ... \quad n \in X?$$

e le possibili serie di risposte sono $2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2\ (n\ volte) = 2^n$.

2 Numeri razionali

2.1 Ordinamento

Indichiamo con $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, Q$ gli insiemi dei numeri naturali, interi relativi, e razionali:

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &= \{0, 1, 2, \ldots\} \\ \mathbb{Z} &= \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\} \\ \mathbb{Q} &= \{\frac{m}{n} |\ m, n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0\}; \end{aligned}$$

i numeri naturali vengono identificati con gli interi relativi non negativi, e i numeri interi relativi vengono identificati con le frazioni a denominatore 1, cosi' si ha

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}.$$

Ogni numero razionale è dato da una frazione, ma frazioni diverse possono dare lo stesso numero razionale, ad esempio $10/15 = 6/9$. Precisamente, si pone $m_1/n_1 = m_2/n_2$ se e solo se $(m_1n_2)/(n_1n_2) = (n_1m_2)/(n_1n_2)$ se e solo se $m_1n_2 = n_1m_2$.

I numeri razionali si possono confrontare; ad esempio $3/4 < 4/5$ in quanto $3/4 = 15/20 < 16/20 = 4/5$. Precisamente, sotto la condizione $n_1, n_2 > 0$ si pone $m_1/n_1 \leq m_2/n_2$ se e solo se $(m_1n_2)/(n_1n_2) \leq (n_1m_2)/(n_1n_2)$ se e solo se $m_1n_2 \leq n_1m_2$.

La relazione d'ordine $\leq$ fra numeri razionali gode delle seguenti proprieta': per ogni $x, y, z \in \mathbb{Q}$,

$$\begin{aligned}
&x \leq x \\
&x \leq y \text{ e } y \leq x \;\Rightarrow\; x = y \\
&x \leq y \text{ e } y \leq z \;\Rightarrow\; x \leq z
\end{aligned}$$

Inoltre, questa relazione d'ordine e' totale, cioe' per ogni $x, y \in \mathbb{Q}$ vale una (ed una sola) delle relazioni $x < y$, $x = y$, $x > y$.

Fissati su una retta un primo punto O, detto "punto origine," ed un secondo punto U, detto "punto unita", si ha un modo naturale di associare ad ogni numero razionale un punto della retta, in modo che al numero zero 0 corrisponda il punto O ed al numero 1 corrisponda il punto U.
Sulla retta esiste una relazione d'ordine totale naturale nella quale il punto O precede il punto U. Per ogni due numeri razionali $a, b \in \mathbb{Q}$ con corrispondenti punti A, B sulla retta, si ha che $a < b$ se e solo se A precede B.

2.2 Operazioni

In $\mathbb{Q}$ sono definite due operazioni, di somma $+$ e prodotto $\cdot$; ciascuna operazione e' associativa e commutativa, le due operazioni sono legate dalla proprieta' distributiva: per ogni a, b, c,

$$a(b + c) = ab + ac;$$

ci sono dei numeri speciali, 0 e 1, che sono elementi neutri per le due operazioni; ogni $q \in Q$ possiede un opposto $-q \in \mathbb{Q}$, caratterizzato dalla condizione

$$q + (-q) = 0,$$

ogni $q \in Q$ diverso da 0 possiede un inverso $q^{-1} \in \mathbb{Q}$, caratterizzato dalla condizione

$$qq^{-1} = 1.$$

Le due due operazioni sono legate alla relazione d'ordine dalle proprieta'

$$\begin{aligned} &\forall a \leq b, \forall c,\ a+c \leq b+c; \\ &\forall a \leq b, \forall c > 0,\ ac \leq bc; \\ &\forall a \leq b, \forall c < 0,\ ac \geq bc. \end{aligned}$$

Le equazioni e le disequazioni di primo grado si trattano bene in $\mathbb{Q}$, non cosi' quelle di secondo grado. L'equazione

$$x^2 = 2$$

non ha soluzioni in $\mathbb{Q}$.
Lo proviamo per assurdo. Supponiamo che l'equazione abbia soluzioni in $\mathbb{Q}$; allora l'equazione avra' due soluzioni, una opposta dell'altra; sia $\frac{m}{n}$ la soluzione positiva dell'equazione. Si ha dunque

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2; \qquad \frac{m^2}{n^2} = 2; \qquad m^2 = 2n^2.$$

Ora, m ed n hanno una fattorizzazione in primi:

$$\begin{aligned} m &= 2^a 3^b \cdots, \qquad a, b, \ldots \in \mathbb{N}, \\ n &= 2^c 3^d \cdots, \qquad a, b, \ldots \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Sostituendo nell'equazione si ha

$$(2^a 3^b \cdots)^2 = 2(2^c 3^d \cdots)^2,$$

cioe'

$$2^{2a} 3^{2b} \cdots = 2^{2c+1} 3^{2d} \cdots .$$

Osserviamo che l'esponente di 2 al primo membro e' pari, mentre al secondo membro e' dispari. Abbiamo cosi' un numero naturale che ha due fattorizzazioni in primi diverse, contro il teorema di fattorizazione unica.

Al fatto algebrico che l'equazione $x^2 = 2$ non possiede soluzioni in $\mathbb{Q}$ corrisponde il fatto geometrico che in un quadrato la diagonale non e' commensurabile con il lato. Rappresentati i numeri razionali come punti su una retta, si ha dunque che esistono dei punti sulla retta che non rappresentano alcun numero razionale.

2.3 Rappresentazione decimale

Un modo di affrontare la questione dell'ampliamento del campo dei numeri razionali in modo da risolvere tali problemi e' suggerito da un'altra rappresentazione dei numeri razionali. Ogni frazione puo' essere riguardata come una divisione fra interi; effettuando questa divisione applicando "all'infinito" l'algoritmo della divisione, si ottiene un numero decimale, eventualmente con infinite cifre dopo la virgola. Ad esempio si ha

$$\frac{11}{6} = 11 : 6 = 1,8333\cdots = 1,8\overline{3};$$

si e' ottenuto un numero decimale periodico. Non e' un caso: ogni frazione e' rappresentata da un numero decimale con un numero finito di cifre dopo la virgola, oppure periodico. [1]

Viceversa, ogni numero decimale con un numero finito di cifre dopo la virgola oppure periodico equivale ad una frazione. Per i numeri decimali con un numero finito di cifre dopo la virgola questa affermazione e' ovvia; per i numeri decimali periodici se ne vedra' una motivazione piu' avanti.

3 Numeri reali

3.1 Numeri reali

Per "numero reale" intendiamo un qualsiasi numero decimale, con un numero di cifre dopo la virgola finito o infinito, periodico o non periodico; possiamo pensare un numero decimale con un numero finito di cifre dopo la virgola come un numero periodico con periodo zero. Dunque un numero reale e' dato mediante una scrittura

$$\pm a, a_1 a_2 a_3 \cdots$$

dove $a \in \mathbb{N}$ e' un numero naturale e gli $a_i \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ sono cifre decimali. Intendiamo che due scritture diverse rappresentino due numeri reali diversi, con l'eccezione delle coppie date da una scrittura periodica di periodo 9 e una scrittura periodica di periodo 0, come

$$15,3499\ldots = 15,3500\ldots$$

L'insieme dei numeri reali si indica con $\mathbb{R}$.

> La relazione d'ordine e le operazioni di somma e prodotto si estendono da $\mathbb{Q}$ ad $\mathbb{R}$; in modo che continuino a valere le proprieta' dell'ordine e delle singole operazioni, e le proprieta' che legano le operazioni fra loro e con l'ordine.

3.2 L'equazione $x^2 = 2$

Consideriamo l'equazione $x^2 = 2$ nell'incognita x in $\mathbb{R}$; dalle proprieta' delle operazioni segue che, se questa equazione ha soluzioni, allora ne ha esattamente due, una opposta dell'altra. Cerchiamo dunque una soluzione positiva dell'equazione. Consideriamo la disequazione $x^2 \leq 2$ nell'incognita x in $\mathbb{Q}^+$; fra le soluzioni intere

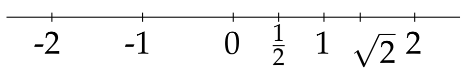
[1] Ci si puo' rendere conto di questo fatto nel modo seguente. I possibili resti di una divisone di un numero naturale m per un numero naturale $n \neq 0$ sono $0, 1, \ldots, n-1$; dunque si ha che: (1) o uno dei resti parziali e' 0 e la divisione porge un numero decimale con un numero finito di cifre dopo la virgola; (2) oppure, se nessuno dei resti parziali e' 0, dopo al piu' n passi si ottiene un resto parziale gia' ottenuto in precedenza e l'iterazione della divisione porge un numero decimale periodico.

ce ne e′ una massima ed e′ 1; fra le soluzioni con una cifra decimale ce ne e′ una massima ed e′ $1,4$; fra le soluzioni due cifre decimali ce ne e′ una massima ed e′ $1,41$; fra le soluzioni tre cifre decimali ce ne e′ una massima ed e′ $1,414$; ... si ottiene cosi′ un numero reale $r = 1,414\ldots$. Si dimostra che $r^2 = 2$.

L′insieme dei numeri razionali e′ strettamente contenuto nell′insieme dei numeri reali: $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$; i numeri reali non razionali si dicono ”irrazionali”; ad esempio $\sqrt{2} = 1,414\ldots$ e′ irrazionale.

3.3 Retta reale

Scelti su una retta un primo ed un diverso secondo punto, l′identificazione del numero 0 col primo punto e del numero 1 col secondo punto si estende in modo naturale prima ad una identificazione dei numeri naturali con certi punti, poi ad una identificazione dei numeri interi relativi con certi punti, poi ad una identificazione dei numeri razionali con certi punti, ed infine in modo non banale ad una identificazione dei numeri reali con tutti i punti della retta: ogni numero reale e′ identificato con un punto della retta, ed ogni punto della retta si ottiene da uno ed un solo numero reale.



3.4 Identita′

Dalle proprieta′ delle operazioni sui numeri reali seguono varie identita′ algebriche. Ad esempio l′identita′

$$(x+p)(x+q) = x^2 + (p+q)x + pq$$

che ammette come casi particolari $(x+y)(x-y) = 0$ e $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$. L′identita′ di sopra si estende opportunamente ad un numero qualsiasi di fattori; ad esempio

$$(x+p)(x+q)(x+r) = x^3 + (p+q+r)x^2 + (pq+pr+qr)x + pqr.$$