Esercizi, I settimana

1. La parte intera di un numero reale a e' definita come il massimo intero $\leq a$, e si denota con $[a]$. Usando le proprieta' delle operazioni e dell'ordine sui numeri reali e opportune approssimazioni dei numeri irrazionali coinvolti, si determini la parte intera di ciscuno dei seguenti numeri reali

$$\frac{23+\sqrt{19}}{7}, \quad \frac{23-\sqrt{19}}{7}, \quad \frac{19}{2+\sqrt{5}}, \quad 1-10\pi.$$

2. Si rappresenti ciascuno dei seguenti trinomi di secondo grado nella forma $a(x+b)^2+c$, con a,b,c opportunamente scelti

$$x^2-x-1, \quad 3x^2-6x+1, \quad x^2+x+1/4.$$

   Si usi tale rappresentazione per determinare le radici del trinomio e per studiarne il segno.

3. Utilizzando il teorema e la regola di Ruffini, si determinino le radici e una fattorizzazione del seguente polinomio, e si usi tale fattorizzazione per studiarne il segno

$$p(x)=24x^3-26x^2+9x-1.$$

4. Raccogliere a fattore comune la potenza della x con esponente minore che compare nell'espressione

$$13x^{-3/4}+11x^{4/3}+7x^{-3/2}.$$

   Raccogliere a fattore comune la potenza della x con esponente maggiore.

5. Determinare eventuali minimo, massimo, estremo superiore, estremo inferiore in $\mathbb{R}$ dei seguenti sottinsiemi di $\mathbb{R}$

$$\{3/n \mid n\in\mathbb{N},\ n\neq 0\}, \quad \{(-2)^n \mid n\in\mathbb{N}\}.$$

6. Usando solo la definizione di radice, e le proprieta' delle potenze ad esponente intero positivo, dimostrare le seguenti proprieta' delle radici

$$\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab} \quad \forall n \text{ intero positivo} \quad \forall a,b\geq 0$$
$$\sqrt[mp]{a^{np}}=\sqrt[m]{a^n}, \quad \forall m,n,p \text{ interi positivi } \forall a\geq 0$$

7. Sia fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano, e tramite di esso siano identificati i vettori del piano con coppie ordinate di scalari. Si rappresentino i vettori $\mathbf{a}=(1,2)$, $\mathbf{b}=(3,1)$ e $\mathbf{c}=(0,5)$. Si stabilisca se $\mathbf{c}$ e' combinazione lineare di $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$, prima graficamente e poi algebricamente.

8. Sia fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano, e tramite di esso siano identificati i vettori dello spazio con terne ordinate di scalari. Si considerino i vettori $\mathbf{a} = (1, 1, 0)$, $\mathbf{b} = (0, 1, 1)$, $\mathbf{c} = (2, 5, 3)$ e $\mathbf{d} = (3, 6, 4)$. Si stabilisca se $\mathbf{c}$ e' combinazione lineare di $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ e se $\mathbf{d}$ e' combinazione lineare di $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$. Si interpretino geometricamente i risultati trovati.

9. Sia fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano, e tramite di esso siano identificati i vettori del piano con coppie ordinate di scalari. Si rappresentino i vettori $\mathbf{a} = (1, \frac{3}{2})$, $\mathbf{b} = (\frac{2}{3}, 1)$ e $\mathbf{c} = (1, 0)$. Si stabilisca se $\mathbf{c}$ e' combinazione lineare di $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$, prima graficamente e poi algebricamente.

10. Si dimostri la seguente proprieta' delle operazioni su $\mathbb{R}^2$

$$\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b, \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall a, b \in \mathbb{R}^2.$$

11. Si verifichi graficamente su un esempio, poi si dimostri la seguente proprieta' delle operazioni su $\mathcal{G}_o^2$

$$\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b, \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall a, b \in \mathcal{G}_o^2.$$