Lezione 2, Analisi, 19.09.2017

Numeri reali

Intervalli

Per ciascun $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \leq b$, l'insieme dei numeri reali compresi fra a e b si dice "intervallo chiuso di estremi a e b", e si indica con $[a, b]$; in simboli:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : \ a \leq x \leq b\}.$$

Un sottinsieme $I \subseteq \mathbb{R}$ si dice un "intervallo" di $\mathbb{R}$ se e solo se per ogni due punti $a \leq b$ con $a, b \in I$ si ha $[a, b] \subseteq I$. Si prova che gli intervalli di $\mathbb{R}$ sono tutti e soli i seguenti sottinsiemi di $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
[a, b] &= \{x \in \mathbb{R} : \ a \leq x \leq b\} \\
[a, b[&= \{x \in \mathbb{R} : \ a \leq x < b\} \\
]a, b] &= \{x \in \mathbb{R} : \ a < x \leq b\} \\
]a, b[&= \{x \in \mathbb{R} : \ a < x < b\} \\
[a, +\infty[&= \{x \in \mathbb{R} : \ x \geq a\} \\
]a, +\infty[&= \{x \in \mathbb{R} : \ x > a\} \\
]-\infty, b[&= \{x \in \mathbb{R} : \ x < b\} \\
]-\infty, b] &= \{x \in \mathbb{R} : \ x \leq b\} \\
]-\infty, +\infty[&= \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Estremo superiore, estremo inferiore

Sia $S \subseteq \mathbb{R}$, $S \neq \emptyset$, un sottinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$.
Un elemento $M \in S$ si dice "elemento massimo" di S se per ogni $s \in S$ si ha $s \leq M$. Se esiste, tale elemento è unico, lo si indica con $\mathrm{Max}(S)$. Analogamente, si definisce la nozione di "elemento minimo" di S e la notazione $\mathrm{Min}(S)$.
Un elemento $K \in \mathbb{R}$ si dice "maggiorante" di S se per ogni $s \in S$ si ha $s \leq K$. Analogamente, si definsce la nozione di "minorante" di S.

Esempi.
L'intervallo $[0, +\infty[$ ha minimo $\mathrm{Min}([0, +\infty[) = 0$, non ha massimo, non ha maggioranti.
L'intervallo $[0, 1[$ non ha massimo (per ogni $a \in [0, 1[$ esiste un $b \in [0, 1[$ con $a < b$; infatti, basta prendere $b = (a + 1)/2$). L'intervallo $[0, 1[$ ha molti maggioranti (ad esempio 1, o 2, o 3), l'insieme dei suoi maggioranti coincide con l'intervallo $[1, +\infty[$.

Definizione 1 *Sia $S \subseteq \mathbb{R}$, con $S \neq \emptyset$. Un elemento $h \in \mathbb{R}$ si dice esteemo superiore di S se h è il minimo dei minoranti di S. Se esiste, tale elemento è unico, e lo si indica* *con $Sup(S)$. Analogamente, si definisce la nozione di elemento estremo inferiore di S e la notazione $Inf(S)$.*

Esempi.
L'intervallo $[0, +\infty[$ non possiede estremo superiore.
L'intervallo $[0, 1[$ ha estremo superiore, e $\text{Sup}([0, 1[) = 1$.

Fatto. Sia $r = a, a_0 a_1 a_2 \ldots$ ($a \in \mathbb{N}$ e a_i cifre decimali) un numero reale non negativo, e siano $r_0 = a,\ r_1 = a, a_1,\ r_2 = a, a_1 a_2$ ... i suoi troncamenti decimali; allora si ha

$$r = \text{Sup}\{r_0, r_1, r_2, \ldots\}.$$

Un sottinsieme $S \subseteq \mathbb{R}$ si dice "superiormente limitato" se S possiede qualche maggiorante, "inferiormente limitato" se possiede qualche minorante, e "limitato'" se è sia superiormente limitato che inferiormente limitato.

La proprietà fondamentale dell'ordinamento nell'insieme dei numeri reali è data dal seguente

Teorema 1 *Ogni sottinsieme non vuoto e superiormente limitato di $\mathbb{R}$ possiede in $\mathbb{R}$ estremo superiore. Analogamente. Ogni sottinsieme non vuoto e inferiormente limitato di $\mathbb{R}$ possiede in $\mathbb{R}$ estremo inferiore.*

Questo teorema non vale in $\mathbb{Q}$. Infatti l'insieme

$$\{q \in \mathbb{Q} |\ q \geq 0,\ q^2 \leq 2\}$$

è un sottinsieme di $\mathbb{Q}$ non vuoto e superiormente limitato, ma non possiede in $\mathbb{Q}$ alcun estremo superiore (si prova che questo elemento dovrebbe essere $\sqrt{2}$, che non sta in $\mathbb{Q}$).

Questo teorema costituisce un potente strumento di definzione. Un esempio. Fissata nel piano una unità di misura, sia $r > 0$ un numero reale positivo e sia $\mathcal{C}_r$ una circonferenza di raggio r. Si vuole definire la lunghezza di $\mathcal{C}_r$ a partire dalla nozione di lunghezza di un segmento. Per ogni $n = 3, 4, \ldots$ si considera un poligono regolare P_n iscritto nella circonferenza C_r e si definisce

$$\text{lunghezza di } \mathcal{C}_r = \text{Sup}\{\text{perimetro di } P_n;\ n = 3, 4, \ldots\}.$$

Si prova che esiste una costante, detta "pi greco" ed indicata con π, tale che per ogni r si abbia

$$\text{lunghezza di } \mathcal{C}_r = 2\pi r.$$

Il troncamento di π alle prime 8 cifre decimali è $3, 14159265$

Radici

Ricordiamo che si definsce il valore assoluto di un numero reale x, e si indica con $|x|$, il numero reale $|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$

Teorema 2 *Una equazione $x^2 = r$ nell'incognita x (r parametro reale) ha in $\mathbb{R}$*

due soluzioni distinte, opposte fra loro, se $r > 0$;

solo la soluzione $x = 0$, se $r = 0$;

nessuna soluzione, se $r < 0$;

Definizione 2 *Per ogni $r \in \mathbb{R}$, con $r \geq 0$, l'unica soluzione non negativa dell'equazione $x^2 = r$ si dice "radice quadrata aritmetica" di r, e si indica con $\sqrt{r}$. Quindi $\sqrt{r}$ esiste solo per $r \geq 0$ ed è caratterizzata da*

$$(\sqrt{r})^2 = r, \quad \sqrt{r} \geq 0$$

Osservazione. $\sqrt{s^2}$ è definta per ogni $s \in \mathbb{R}$ e si ha $\sqrt{s^2} = |s|$.

Teorema 3 *Ciascuna equazione $x^3 = r$ nell'incognita x (r parametro reale) ha in $\mathbb{R}$ una ed una sola soluzione, dello stesso segno di r.*

Definizione 3 *Per ogni $r \in \mathbb{R}$, l'unica soluzione dell'equazione $x^3 = r$ si dice "radice cubica aritmetica di" r, e si indica con $\sqrt[3]{r}$. Quindi $\sqrt[3]{r}$ esiste per ogni $r \in \mathbb{R}$ ed è caratterizzata da*

$$(\sqrt[3]{r})^3 = r.$$

Più in generale:

per ogni intero positivo pari p la radice $p-$ma aritmetica $\sqrt[p]{r}$ di un numero reale r è definita per ogni $r \geq 0$ ed è caratterizzata da $(\sqrt[p]{r})^p = r$, $\sqrt[p]{r} \geq 0$;

per ogni intero positivo dispari d la radice $d-$ma aritmetica $\sqrt[d]{r}$ di un numero reale r è definita per ogni $r \in \mathbb{R}$, ed è caratterizzata da $(\sqrt[d]{r})^d = r$.

Equazioni e disequazioni di II grado

Consideriamo il generico polinomio di secondo grado

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

nella incognita x (a, b, c parametri in $\mathbb{R}$, con $a \neq 0$), ed indichiamo con $\Delta = b^2 - 4ac$ il suo discriminante. Ricordiamo che, per $a > 0$, si ha

- se $\Delta > 0$, allora

  $p(x)$ ha due radici distinte $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$;

  $p(x)$ si fattorizza come $p(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$;

  $p(x) > 0$ per ogni x con $x < x_1$ oppure $x > x_2$;

  $p(x) < 0$ per ogni x con $x_1 < x < x_2$;

- se $\Delta = 0$, allora

  $p(x)$ ha due radici coincidenti $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$;

  $p(x)$ si fattorizza come $p(x) = a(x - x_1)^2$;

  $p(x) > 0$ per ogni x con $x \neq x_1$;

- se $\Delta < 0$, allora

  $p(x)$ non ha radici in $\mathbb{R}$;

  $p(x)$ è irriducibile su $\mathbb{R}$;

  $p(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Polinomi

Richiami sui polinomi, I. Informalmente, si puo' dire che i polinomi a coefficienti in $\mathbb{R}$ sono le espressioni che si possono scrivere a partire da "indeterminate" e dai numeri reali mediante operazioni di somma e prodotto, e sulle quali si opera usando soltanto le proprieta' commutativa ed associativa di ciascuna operazione, e distributiva del prodotto rispetto alla somma.
Un polinomio in una indeterminata x a coefficienti reali e' un'espresione del tipo

$$p(x) = a_n x^n + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

in breve,

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i,$$

dove gli a_i sono dei numeri reali, detti coefficienti del polinomio; se $a_n \neq 0$, allora si dice che $p(x)$ ha grado n, e si scrive $\mathrm{gr}(p(x)) = n$; per il polinomio nullo non si definisce il grado. Il grado del polinomio prodotto e' la somma dei gradi dei polinbomi fattori

$$\mathrm{gr}(p(x)q(x)) = \mathrm{gr}(p(x)) + \mathrm{gr}(q(x)).$$

Per ogni $r \in \mathbb{R}$, sostituendo r all'indeterminata x in $p(x)$ si ottiene un numero reale $p(r) = a_n r^n + \cdots + a_2 r^2 + a_1 r + a_0$, che si dice "valutazione" di $p(x)$ in r. Il principio di identita' dei polinomi afferma che due polinomi hanno la stessa valutazione per infiniti numeri reali se e solo se i due polinomi hanno gli stessi coefficienti: dati

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \quad q(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i,$$

si ha che $p(r) = q(r)$ per infiniti $r \in \mathbb{R}$ se e solo se $a_i = b_i$ per ogni $i = 0, 1, \ldots, n$.

Radici Se la valutazione di un polinomio $p(x)$ su numero reale $r \in \mathbb{R}$ e' zero, cioe' se $p(r) = 0$, allora si dice che r e' una "radice" di $p(x)$. Vale il

> Teorema (Ruffini). Sia $p(x)$ un polinomio non nullo, e sia $r \in \mathbb{R}$; allora r e' una radice di $p(x)$ se e solo se il binomio $x - r$ divide $p(x)$ cioe' $p(x)$ si puo' scrivere come
>
> $$p(x) = (x - r)q(x);$$
>
> dove $q(x)$ e' un polinomio di grado $n - 1$.

Il teorema di consiste di due affermazioni: (1) se il binomio $x - r$ divide $p(x)$ allora r e' una radice di $p(x)$ (affermazione ovvia), (2) se r e' una radice di $p(x)$ allora il binomio $x - r$ divide $p(x)$. La "regola di Ruffini" da un modo per costruire il polinomio quoziente $q(x)$. Il Teorema di Ruffini ha un'importante conseguenza:

> Un polinomio di grado n a coefficienti reali ha al piu' n radici.

La ricerca delle eventuali radici razionali di un polinomio si può effettuare (in un numero finito di passi) usando il seguente

Fatto. Sia $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ un polinomio con $a_n \neq 0$; se p(x) possiede una radice $q \in \mathbb{Q}$ allora, posto $q = r/s$ con r, s coprimi fra loro allora: (1) il numeratore r divide a_0; (2) il denominatore s divide a_n.

Esempio. Consideriamo l'equazione

$$p(x) = x^3 - 10x^2 + 31x - 30 = 0.$$

Ci chiediamo se il polinomio $p(x)$ ha una radice in $\mathbb{Q}$; se esiste, una tale radice deve appartenere a $\mathbb{Z}$ e deve essere un divisore di -30; ci chiediamo dunque se $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 5, \pm 6$ sono radici del polinomio; si ha: $p(1) = -8$, $p(-1) = -72$, $p(2) = 0$. Dunque $p(x)$ e' divisibile per $x - 2$, e usando la regola di Ruffini si trova

$$p(x) = (x - 2)(x^2 - 8x + 15).$$

Le soluzioni dell'equazione sono dunque $x_1 = 2$ e le soluzioni dell'equazione di II grado $x^2 - 8x + 15 = 0$, che a sua volta sono $x_2 = 3$ e $x_3 = 5$. In definitiva, l'insieme delle soluzioni e' $\{2, 3, 5\}$.

Equazioni irrazionali. Esempio

Consideriamo l'equazione

$$\sqrt{2x+3} = 3x+2.$$

Questa equazione è definta quando il primo mebro è defsix, cioè quando $2x+3 \geq 0$.
Il primo membro indica sempre una quantità non negativa, dunque l'equazione può avere soluzioni solo se anche il secondo membro è non negativo, cioè se $3x+2 \geq 0$.
Dunque le eventuali soluzioni dell'equazione devono soddisfare il sistema di disequazioni

$$\begin{cases} 2x+3 \geq 0 \\ 3x+2 \geq 0 \end{cases}, \quad \text{cioè } x \geq -\frac{2}{3}.$$

Sotto questa condizione, l'equazione data è equivalente all'equazione

$$(3x+2)^2 = 2x+3, \quad \text{cioè } \; 9x^2+10x+1=0.$$

Questa equazione ha due soluzioni reali distinte $x_1 = -1$ e $x_2 = -\frac{1}{9}$. $x_1 = -1$ non soddisfa la condizione $x \geq -2/3$, mentre $x_2 = -\frac{1}{7}9$ la soddisfa. Dunque l'equazione data ha l'unica soluzione $x = -\frac{1}{9}$.