Lezione 3, Analisi, 20.09.2017

Numeri reali

Sommatorie

La proprietà associativa $(a_1 + a_2) + a_3 = a_1 + (a_2 + a_3)$ della somma di numeri reali asserisce che tutti e due i modi possibili di sommare tre numeri a_1, a_2, a_3 mantenendo l'ordine danno lo stesso risultato. Dunque non è necessario usare le parentesi e si può scrivere $a_1 + a_2 + a_3$, o $\sum_{i=1}^{3} a_i$. Inoltre, per la proprietà commutativa della somma di numeri reali, anche cambiando l'ordine dei termini si ottiene sempre lo stesso risultato. Così si può anche scrivere $\sum_{i\in\{1,2,3\}} a_i$. Questo fatto vale per ogni sequenza finita di numeri reali. Per ogni $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ ha dunque senso parlare della loro somma, senza specificare il modo nel quale debba essere calcolata; tale somma si indica con

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \text{ in breve } \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Dalle proprietà deille operazioni sui numeri reali seguono anche le seguenti proprietà delle sommatorie.

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i = \sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)\\
&r\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} r a_i\\
&\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_{n-i+1}
\end{aligned}$$

Il complesso delle prime due si dice "proprietà di linearita"' delle sommatorie.

Analogamente si definscono le produttorie, che soddisfano analoghe proprietà. Nel seguito esemplifichiamo l'uso delle sommatorie per manipolare espressioni algebriche generali.

Progressioni aritmetiche e progressioni geometriche

Una sequenza di numeri reali tale che la differenza fra un termine e il termine precedente sia costante si dice "progressione aritmetica", e tale differenza si dice sua "ragione". In altri termini, per ogni $a, q \in \mathbb{R}$ fissati, la progressione aritmetica di primo termine a e di ragione q è

$$a, a+q, a+2q, a+3q, \ldots, \quad \text{in breve } a + nq,\ n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Osservazione. La progressione è strettamente crescente, costante, o strettamente decrescente secondo che q sia maggiore, uguale, o minore di 0.

La progressione aritmetica non banale più semplice è la sequenza dei numeri naturali $1, 2, 3, \ldots$. Per ogni numero naturale n, possimo considerare la somma

$$1 + 2 + \cdots + n = \sum_{i=1}^{n} i$$

e chiederci se esista un qualche modo di ottenerla, pi‘u semplice di quello diretto.

Consideriamo ad esempio la somma $1 + 2 + 3 + 4$; ed osserviamo che

$$1+2+3+4+4+3+2+1 = (1+4)+(2+3)+(3+2)+(4+1) = 5 \times 4$$

da cui

$$1 + 2 + 3 + 4 = \frac{5 \times 4}{2}.$$

Ciò suggerisce che per ogni n si abbia

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{(n+1)n}{2}.$$

Così è, e si può dimostrare come segue:

$$2\sum_{i=1}^{n} i = \sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n}(n-i+1) = \sum_{i=1}^{n}(i+n-i+1) = \sum_{i=1}^{n}(n+1) = (n+1)n$$

da cui

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{(n+1)n}{2}.$$

Esempio. Per $n = 100$ si ha $\sum_{i=1}^{100} i = \frac{101 \times 100}{2} = 5050$.

Una sequenza di numeri reali non nulli tale che il rapporto di un termine sul termine precedente sia costante si dice “progressione geometrica”, e tale differenza si dice sua “ragione”. In altri termini, per ogni $a, q \in \mathbb{R}$ fissati, con $a, q \neq 0$, la progressione geometrica di primo termine a e di ragione q è

$$a, aq, aq^3, aq^3, \ldots, \quad \text{in breve } \; aq^n, \; n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Osservazione. Consideriamo il caso $a, q > 0$. La progressione è strettamente crescente, costante, o strettamente decrescente secondo che q sia maggiore, uguale, o minore di 1.

La progressione geometrica di primo termine 1 e ragione q è $1, q, q^2, q^3, \ldots$. Per ogni numero naturale n, possimo considerare la somma

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \sum_{i=0}^{n} q^i$$

e chiederci se esista un qualche modo di ottenerla, pi'u semplice di quello diretto.
Consideriamo ad esempio la somma $1 + q + q^2 + q^3$; ed osserviamo che

$$(1 + q + q^2 + q^3)(1 - q) = 1 + q + q^2 + q^3 - q - q^2 - q^3 - q^4 = 1 - q^4$$

da cui, per $q \neq 1$ si ricava

$$1 + q + q^2 + q^3 = \frac{1 - q^4}{1 - q}.$$

Ciò suggerisce che per $q \neq 1$, per ogni n si abbia

$$\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Così è.

Potenze del binomio

Descrizione formale del prodotto di due poilnommi. Siano

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \quad (a_n \neq 0)$$
$$q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_m x^m = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j \quad (b_m \neq 0)$$

due polinomi di gradi ripettivi n, m. Il loro prodotto si può descrivere come

$$\begin{aligned} p(x)q(x) &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)x^2 + \cdots + a_n b_m x^{n+m} \\ &= \sum_{h=0}^{n+m} \left[\sum_{i,j:\ i+j=h} a_i b_j \right] x^h. \end{aligned}$$

Fra le prime identita' del calcolo algebrico ci sono il quadrato del binomio $(1 + x)^2 = 1 + 2x + x^2$, il cubo $(1 + x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3$, ... e una regola per calcolare la potenza ennesima del binomio $(1 + x)^n$. Di seguito ricaviamo questa regola dalle proprietà delle operazioni sui polinomi.
Per ciascun $n\mathbb{N}$, indichiamo con

$$1 = c_{n,0}, c_{n,1}, c_{n,2}, \ldots, c_{n,n} = 1$$

i coefficienti del polinomio potenza $n-$ma di $(1 + x)$, poniamo cioè

$$(1 + x)^n = \sum_{i=0}^{n} c_{n,i} x^i.$$

I numeri cosi' definiti formano un triangolo infinito, le cui prime tre righe sono date da

	0	1	2	3	4	...
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		

Di seguito proviamo che questi coefficienti soddisfano una ben nota ricorsione. Consideriamo l'identita'

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n;$$

sostituiamo alle potenze al I e II membro le loro espansioni nei termini dei rispettivi coefficienti

$$\sum_{i=0}^{n+1} c_{n,i}x^i = (1+x)\sum_{j=0}^{n} c_{n,j}x^j;$$

sviluppiamo il II membro si ottiene

$$1 + \left[\sum_{i=1}^{n}(c_{n,i} + c_{n,i-1})x^i\right] + x^{n+1}$$

Uguagliando il coefficiente di x^i al I membro al coefficiente di x^i al II membro, si ha

$$c_{n+1,i} = c_{n,i} + c_{n,i-1} \qquad 0 < i < n+1.$$

Usando questa ricorsione si puo' ad esempio determinare la quarta riga della matrice

	0	1	2	3	4	5	...
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		

e ricavare

$$(1+x)^4 = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4.$$

Potenze

Per ogni numero reale $a \in \mathbb{R}$, con $a \neq 0$, e per ogni intero relativo $n \in \mathbb{Z}$, la potenza di base a ed esponente n e' definita da

$$a^n = \begin{cases} aa\cdots a \quad (n\ volte) & per\ n > 0; \\ 1 & per\ n = 0; \\ a^{-1}a^{-1}\cdots a^{-1} \quad (-n\ volte) & per\ n < 0; \end{cases};$$

si definisce $0^n = 0$ per ogni n intero positivo; non si definscono le potenza di 0 ad altri esponenti.

Esempio:

$$(-\frac{2}{3})^{-2} = (-\frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4}.$$

Le potenze ad esponente intero relativo hanno le seguenti proprieta': per ogni $a, b \in \mathbb{R}$, con $a, b \neq 0$, si ha

$$\begin{aligned} a^m a^n &= a^{m+n}; \\ (a^m)^n &= a^{mn}; \\ (ab)^m &= a^m b^m. \end{aligned}$$

Per ogni numero reale $a \in \mathbb{R}$, con $a > 0$, e per ogni numero razionale $m/n \in \mathbb{Q}$ (con $n > 0$) la potenza di base a ed esponente m/n e' definita da

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Esempio:

$$2^{-5/7} = \sqrt[7]{1/32}.$$

La definzione di potenza di un numero reale $a \in R$, con $a > 0$, ad un esponente reale r si definisce a partire dalle potenze ad esponente razionale tramite estremo superiore e estremo inferiore. Per una base $a > 1$ ed un esponente positivo $r = b, b_0 b_1 b_2 \ldots$, indicati con $r_0 = r$; $r_1 = b, b_1$; $r_2 = b, b_1 b_2$; ,,, i suoi troncamenti decimali, si pone

$$a^r = \mathrm{Sup}\{a^{r_0}, a^{r_1}, a^{r_2}, \ldots\}$$

In modo anlaogo si trattano gli altri casi.

> Tutte le proprietà delle potenze continuano a valere in questo caso generale.

Esempio.

$$2^\pi = \mathrm{Sup}\{2^3, 2^{3,1}, 2^{3,14}, \ldots\}.$$