Lezione 4, Algebra lineare, 20.09.2017

Spazi vettoriali

$\mathbb{R}^2$

Il complesso costituito da un primo numero reale a_1 e da un secondo numero reale a_2 (nell'ordine, non si esclude che il secondo sia uguale al primo) si dice "coppia ordinata" di numeri reali, e si indica con (a_1, a_2); il primo numero si dice "prima componente" della coppia ordinata, il secondo numero si dice "seconda componente" della coppia ordinata. Due coppie ordinate si dicono uguali se e solo se hanno la stessa prima componente e hanno la stessa seconda componente, in simboli:

$$(a_1, a_2) = (b_1, b_2) \quad \text{se e solo se} \quad a_1 = b_1 \text{ e } a_2 = b_e.$$

L'insieme delle coppie ordinate di numeri reali si indica con $\mathbb{R}^2$,

$$\mathbb{R}^2 = \{(a_1, a_2)|\, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Sistemi di riferimento nel piano

Siano fissati nel piano: un punto O (origine), una prima retta (I asse) per O, ed una diversa seconda retta (II asse) per O; un punto U_1 sul I asse e un punto U_2 sul II asse, diversi da O. Solitamente, si fissa il II asse perpendicolare al I asse, e i due punti alla stessa distanza da O. Su ciascun asse, il punto O e il punto fissato costituiscono un sistema di riferimento.
A ciascuna una coppia ordinata (a_1, a_2) di numeri reali, si associa un punto A del piano nel modo seguente: a_1 si identifica con un punto A_1 del I asse, e a_2 si identifica con un punto A_2 del II asse; la retta per A_1 parallela al II asse e la retta per A_2 parallela al I asse si intersecano in un punto A del piano. Si ha cosi' una corrispondenza biunivoca fra l'insieme $\mathbb{R}^2$ delle coppie ordinate di numeri reali e l'insieme $\mathfrak{P}$ dei punti del piano: ad ogni coppia corrisponde un punto del piano, ed ogni punto del piano proviene da una ed una sola coppia.
Si dice che l'origine, i due assi, e i punti fissati su essi costituiscono un sistema di riferimento per il piano $\mathfrak{P}$. Se alla coppia (a_1, a_2) corrisponde un punto A, allora si dice che A e' il punto di coordinate (a_1, a_2) nel sistema, e si scrive

$$A(a_1, a_2).$$

$\mathbb{R}^2$, operazioni

Sull'insieme $\mathbb{R}^2$ si definiscono le seguenti operazioni somma di due coppie ordinate: per ogni $a = (a_1, a_2)$ e $b = (b_1, b_2)$ in $\mathbb{R}^2$ si pone

$$a + b = (a_1 + b_1, a_2 + b_2);$$

questa operazione è associativa e commutativa; l'analogo del numero zero è la coppia $\underline{0} = (0, 0)$; ogni coppia $a = (a_1, a_2)$ ha una "coppia opposta" $-a = (-a_1, -a_2)$, caratterizzata dalla proprietà $a + (-a) = \underline{0}$;

prodotto di un numero reale per una coppia ordinata: per ogni α in $\mathbb{R}$ ed ogni $a = (a_1, a_2)$ in $\mathbb{R}^2$ si pone

$$\alpha a = (\alpha a_1, \alpha a_2).$$

Siano $a, b \in \mathbb{R}^2$. Si dice che a è "multiplo scalare" di b se esiste un $\beta \in \mathbb{R}$ tale che $a = \beta b$.

Esempi. $(2, 3)$ non è multiplo scalare di $(4, 5)$; infatti l'equazione $(2, 3) = \beta(4, 5)$ nell'incognita β equivale al sistema di due equazioni

$$\begin{cases} 4\beta = 2 \\ 5\beta = 3 \end{cases}$$

che non ha soluzioni. $(1/2, 1/3)$ è multiplo scalare di $(3, 2)$; infatti $(1/2, 1/3) = 1/6(3, 2)$. In un certo senso, il primo esempio rappresenta la norma, ed il secondo l'eccezione.

Siano $a, b, c \in \mathbb{R}^2$. Si dice che a è "combinazione lineare" di b e c se esistono $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tali che $a = \beta b + \gamma c$.

Esempio. $(2, 3)$ non è combinazione lineare di $(4, 5)$ e $(6, 7)$; infatti l'equazione $(2, 3) = \beta(4, 5) + \gamma(6, 7)$ nelle incognite β e γ equivale al sistema di due equazioni

$$\begin{cases} 4\beta + 6\gamma = 2 \\ 5\beta + 7\gamma = 3 \end{cases}$$

che ha una (ed una sola) soluzione $\beta = 2$, $\gamma = -1$). In un certo senso, questo esempio rappresenta la norma.

La coppia $i = (1, 0)$ si dice "prima coppia canonica" di $\mathbb{R}^2$, la coppia $j = (0, 1)$ si dice "seconda coppia canonica" di $\mathbb{R}^2$. Ogni coppia in $a \in \mathbb{R}^2$ si può scomporre come

$$a = (a_1, a_2) = (a_1, 0) + (0, a_2) = a_1(1, 0) + a_2(0, 1) = a_1 i + a_2 j.$$

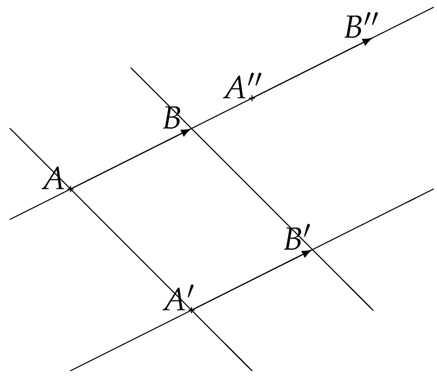
In altri termini: ogni coppia in $a \in \mathbb{R}^2$ si può scrivere in uno ed un solo modo come combinazione lineare dei vettori canonici, e i coefficienti sono le componenti di a.

Vettori nel piano, operazioni

Col termine "segmento orientato" intendiamo un segmento per il quale e' stato scelto un ordine fra i suoi due estremi; rappresentiamo ciascun segmento orientato con un freccia dal suo primo estremo al suo secondo estremo; il primo estremo si dice ″origine″ e il secondo estremo si dice ″termine″ del segmento orientato; indichiamo con AB e il segmento orientato che ha origine A e termine B.

Diciamo che due segmenti orientati non ridotti ad un punto sono ″equivalenti″ se e solo se hanno la stessa direzione, lo stesso verso, la e stessa lunghezza; diciamo che i segmenti orientati ridotti a un punto sono tutti fra loro equivalenti. Osserviamo che

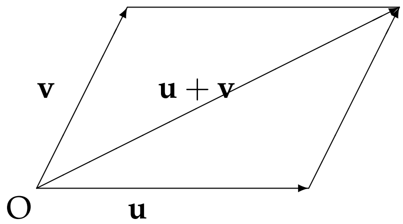
> Comunque siano dati un segmento orientato AB ed un punto A', esiste uno ed un solo segmento orientato $A'B'$ con origine in A' equivalente ad AB. (In generale, B' e′ il quarto vertice del parallelogramma che ha per lati AB e AA')



Col termine ″vettore geometrico″, in breve ″vettore″, intendiamo un oggetto rappresentato da un segmento orientato; con la convenzione che due segmenti orientati rappresentano lo stesso vettore se e solo se sono equivalenti; chiamiamo ″vettore nullo″ l′oggetto rappresentato dai segmenti orientati ridotti a un punto. Indchiamo i vettori con lettere minuscole in grassetto come $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \ldots$, indichiamo il vettore nullo con $\mathbf{0}$, e indichiamo l′insieme dei vettori del piano con $\mathcal{G}^2$.

Fissato un punto O del piano, si ha che ciascun vettore del piano e′ rappresentato da uno ed un solo segmento orientato con origine in O; si puo′ dunque identificare l′insieme $\mathcal{G}^2_o$ dei vettori del piano con l′insieme dei segmenti orientati con origine in O. Cosi′ di regola faremo.

Dati due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{G}^2$, definiamo il vettore somma $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ come il vettore ottenuto considerando il parallelogramma che ammette $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ come lati, e prendendo la diagonale uscente da O:



Questa operazione di addizione di vettori risulta essere commutativa e associativa:

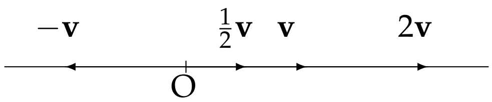
$$\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u},$$
$$(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w}),$$

per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{G}^2$. Il ruolo del numero zero viene svolto dal vettore nullo $\mathbf{0}$. La somma di un qualsiasi vettore col vettore suo simmetrico rispetto ad O ha per risultato il vettore nullo; cosi', per ogni $\mathbf{v}$, il suo simmetrico rispetto ad O viene indicato con $-\mathbf{v}$.

C'e' un modo naturale per definire il prodotto di un numero reale per un vettore $\mathbf{v} \in \mathcal{G}^2$: per un numero intero relativo $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, si pone

$$nv = \begin{cases} \mathbf{v}+ \quad \mathbf{v}+\cdots+ \quad \mathbf{v} & n \textit{ volte} & \textit{per } n>0 \\ 0 & & \textit{per } n=0 \\ (-\mathbf{v})+(-\mathbf{v})+\cdots+(-\mathbf{v}) & -n \textit{ volte} & \textit{per } n<0 \end{cases}$$

... poi si passa, possiamo dire "per suddivisione" , al caso dei numeri razionali, e infine, possiamo dire "per continuita'" ai reali.



Abbiamo cosi' definito due operazioni: l'addizione di due vettori, che fornisce un vettore, e la moltiplicazione di un numero reale per un vettore, che fornisce ancora un vettore. Il calcolo con queste due operazioni gode cosi' delle usuali proprieta' del calcolo letterale; bisogna solo tenere presente che abbiamo oggetti di due tipi: vettori e numeri reali; possiamo sommare vettori con vettori, moltiplicare vettori per numeri, ma non possiamo sommare vettori con numeri, ne' moltiplicare vettori per vettori.

Siano $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{G}^2_O$. Si dice che $\mathbf{a}$ è "multiplo scalare" di $\mathbf{b}$ se esiste un $\beta \in \mathbb{R}$ tale che $\mathbf{a} = \beta\mathbf{b}$.

Se $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, allora $\mathbf{b}$ individua una ed una sola retta per l'origine e un vettore $\mathbf{a}$ è multiplo scalare di $\mathbf{b}$ se e solo se è contenuto in questa stessa retta. Solo il vettore nullo è multiplo scalare del vettore nullo.

Siano $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathcal{G}_O^2$. Si dice che $\mathbf{a}$ è "combinazione lineare" di $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$ se esistono $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tali che $\mathbf{a} = \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}$.

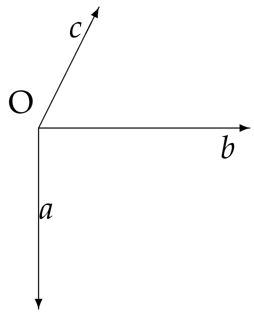
Dati due vettori $\mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathcal{G}^2$ che non stanno su una stessa retta per O, osserviamo che

ogni vettore $\mathbf{a} \in \mathcal{G}^2$ si puo' scrivere come

$$\mathbf{a} = \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c},$$

per una ed una sola coppia $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Infatti: (1) proiettando $\mathbf{a}$ sulla retta di $\mathbf{b}$ parallelamente al vettore $\mathbf{c}$ si ottiene un vettore del tipo $\beta\mathbf{b}$; (2) proiettando $\mathbf{a}$ sulla retta di $\mathbf{c}$ parallelamente al vettore $\mathbf{b}$ si ottiene un vettore del tipo $\gamma\mathbf{c}$; (3) e si ha $\mathbf{a} = \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}$.



Spazi vettoriali reali

Uno "spazio vettoriale reale" è una struttura costituita da un insieme V di elementi, detti "vettori", sul quale sono definite

un'operazione, detta somma, che associa a due vettori $a, b \in V$ un vettore, indicato con $a + b$, in V;

un'operazione, detta moltiplicazione, che associa a un numero reale α e un vettore $a \in V$ un vettore, indicato con αa, in V

che posseggono le seguenti propriet

l'operazione di somma è associativa e commutativa, inoltre esiste in V un vettore, detto vettore nullo e indicato con $\underline{0}$, caratterizzato dalla proprietà

$$a + \underline{0} = a, \quad \forall a \in V;$$

per ogni vettore a in V esiste un vettore di V, detto opposto di a e indicato con $-a$, caratterizzato dalla proprietà

$$a + (-a) = \underline{0};$$

l'operazione di somma di vettori di V, l'operazione di prodotto di elementi di $\mathbb{R}$ per elementi di V, e le operazioni di somma e prodotto di elementi di $\mathbb{R}$ sono fra loro compatibili, nel senso che

$$\begin{aligned}
&\alpha(a+b) = \alpha a + \alpha b \\
&(\alpha+\beta)a = \alpha a + \beta a \\
&(\alpha\beta)a = \alpha a(\beta a) \\
&1a = a
\end{aligned}$$

Si verifica che

l'insieme $\mathbb{R}^2$, con le operazioni di somma e prodotto sopra definite, è uno spazio vettgoriale reale;

l'insieme $\mathcal{G}_o^2$, con le operazioni di somma e prodotto sopra definite, e uno spazio vettoriale reale.

Identificazione di $\mathbb{R}^2$ e $\mathcal{G}_0^2$

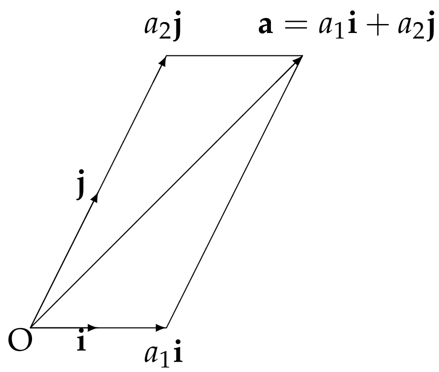
Fatto. Siano dati nel piano due vettori $\mathbf{i}, \mathbf{j} \in \mathcal{G}^2$ che non stanno su una stessa retta. Allora esiste uno ed un solo modo di associare a vettori $a \in \mathbb{R}^2$ vettori $\mathbf{a} \in \mathcal{G}_o^2$ tale che al vettore canonico i sia associato il vettore $\mathbf{i}$, al vettore canonico j sia associato il vettore $\mathbf{j}$, e che sia compatibile con le operazioni defnite su $\mathbb{R}^2$ e $\mathcal{G}_o^2$, cioè: per ogni $a, b \in \mathbb{R}^2$ ed ogni $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
&(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \mathbf{a}+\mathbf{b} \\
&(\mathbf{ffa}) = \alpha\mathbf{a}.
\end{aligned}$$

Espicitamente: per ogni $a = a_1 i + a_2 j$ in $\mathbb{R}^2$ si ha

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}.$$

Ciascun vettore di $\mathcal{G}_o^2$ è l'associato di uno ed un solo vettore di $\mathbb{R}^2$.



Spazio vettoriale $n-$dimensionale reale standard $\mathbb{R}^n$

Sia n un intero positivo fissato. Consideriamo l'inisieme $\mathbb{R}^n$ delle $n-$ple ordinate di numeri reali

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) = (a_i)_1^n, \quad a_i \in \mathbb{R}.$$

Due $n-$ple ordinate di numeri reali si dicono uguali se e solo se hanno le componenti ordinatamenre uguali

$$(a_i)_1^n = (b_i)_1^n \quad \text{se e solo se} \quad a_i = b_i, \ \forall i = 1, \dots, n.$$

Al posto di "$n-$pla ordinata di numeri reali" diremo "vettore ad n componenti reali", in breve "vettore". Su $\mathbb{R}^n$ defniamo le seguenti orprazioni:

Somma di vettori. per ogni due vettori $\mathbf{a} = (a_i)_1^n$ e $\mathbf{b} = (b_i)_1^n$ si definisce il vettore somma $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ ponendo

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_i + b_i)_1^n.$$

Il vettore $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$ si dice "vettore nullo" di $\mathbb{R}^n$; Per ogni vettore $\mathbf{a} = (a_i)_1^n$ si definisce il vettore opposto $-\mathbf{a}$ ponendo $-\mathbf{a} = (-a_i)_1^n$.

Prodotto di numeri reali per vettori. Si definisce il prodotto $r\mathbf{a}$ di $r \in \mathbb{R}$ per il vettore $\mathbf{a} = (a_i)_1^n$ ponendo

$$r\mathbf{a} = (ra_i)_1^n.$$

L'insieme $\mathbb{R}^n$ munito delle operazioni di somma di vettori e di prodotto di numeri reali per vettori, è uno spazio vettoriale reale, detto *spazio vettoriale reale $n-$dimensionale standard*.

I vettori

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0), \ \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \ \dots, \ \mathbf{e}_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$$

si diconoo "vettori canonici" di $\mathbb{R}^n$. Ogni vettore $a = (a_1, \dots, a_n) = (a_i)_1^n \in \mathbb{R}^n$ si può scrivere in uno ed un solo moodo come combinazione lineare dei vettori canonici:

$$a = a_1\mathbf{e}_1 + \dots + a_n\mathbf{e}_n = \sum_{i=1}^n a_i\mathbf{e}_i;$$

i coefficienti della combinazione lineare sono le componenti del vettore.

Spazio vettoriale $\mathcal{G}_0^3$

Nel contesto dello spazio della geometria elementare, analogamente a quanto fatto sopra nel contesto del piano :

-si danno allo stesso modo le nozioni di "segmento orientato", di "equivalenza" di segmenti orientati, e di "vettore geometrico" in breve "vettore"; si indica con

$\mathcal{G}^3$ l'insieme dei vettori dello spazio; si identifica $\mathcal{G}^3$ con l'insieme dei segmenti orientati con origine in un punto fissato O;

-si definscono allo stesso modo le operazioni di somma di vettori e di prodotto di numeri reali per vettori.

Le proprieta' di queste operazioni sui vettori dello spazio sono le stesse proprieta' delle operazioni sui vettori del piano.

L'insieme $\mathcal{G}^3$, munito di queste operazioni, è uno spazio vettoriale reale, che viene detto *spazio vettoriale geometrico*.

Identificazione degli spazi vettoriali $\mathbb{R}^3$ e $\mathcal{G}^3_o$

Fatto. Siano dati nello spazio tre vettori $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \in \mathcal{G}^3$ che non stanno su uno stesso piano. Allora esiste uno ed un solo modo di associare a vettori $a \in \mathbb{R}^3$ vettori $\mathbf{a} \in \mathcal{G}^3_o$ tale che al vettore canonico $e_1 = (1, 0, 0)$ sia associato il vettore $\mathbf{e}_1$, al vettore canonico $e_2 = (0, 1, 0)$ sia associato il vettore $\mathbf{e}_2$, al vettore canonico $e_3 = (0, 0, 1)$ sia associato il vettore $\mathbf{e}_3$, e che sia compatibile con le operazioni defnite su $\mathbb{R}^3$ e $\mathcal{G}^3_o$, cioè: per ogni $a, b \in \mathbb{R}^3$ ed ogni $\alpha \in \mathbb{R}$

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \mathbf{a}+\mathbf{b}$$
$$(\mathbf{ffa}) = \alpha\mathbf{a}.$$

Espicitamente: per ogni $a = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$ in $\mathbb{R}^3$ si ha

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3.$$

Ciascun vettore di $\mathcal{G}^3_o$ è l'associato di uno ed un solo vettore di $\mathbb{R}^3$.